

Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :
Energétique et transferts

Présentée et soutenue par :
Wellington BETENCURTE DA SILVA
le : jeudi 29 novembre 2012

Titre :
Aplicação de filtros de partículas para a assimilação de dados em problemas de fronteira móvel

Ecole doctorale :
Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :
RAPSOEE

Directeur(s) de Thèse :
Olivier FUDYM
Helcio RANGEL BARRETO ORLANDE

Rapporteurs :
Albino JOSE KALAB LEIROZ
Eduardo SOUZA DE CURSI

Membre(s) du jury :
Rénato MACHADO COTTA, Président
Mouna EL HAFI, Membre
Marcelo-José COLAÇO, Membre
Nilson COSTA ROBERTY, Membre



APLICAÇÃO DE FILTROS DE PARTÍCULAS PARA A ASSIMILAÇÃO DE
DADOS EM PROBLEMAS DE FRONTEIRA MÓVEL

WELLINGTON BETENCURTE DA SILVA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de
Pós-graduação em Engenharia Mecânica,
COPPE, da Universidade Federal do Rio de
Janeiro, como parte dos requisitos necessários à
obtenção do título de Doutor em Engenharia
Mecânica.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Marcelo José Colaço

Olivier Fudym

Rio de Janeiro
Novembro de 2012

APLICAÇÃO DE FILTROS DE PARTÍCULAS PARA A ASSIMILAÇÃO DE
DADOS EM PROBLEMAS DE FRONTEIRA MÓVEL

Wellington Betencurte da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

Prof. Olivier Fudym, Ph.D.

Prof. Albino José Kalab Leiroz, Ph.D.

Prof. Mouna El Hafi, Ph.D.

Prof. Eduardo Souza de Cursi, Ph.D.

Prof. Nilson Costa Roberty, D.Sc.

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

NOVEMBRO DE 2012

Silva, Wellington Betencurte da

Aplicação de Filtros de Partículas para a Assimilação de Dados em Problemas de Fronteira Móvel/ Wellington Betencurte da Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XVIII, 162 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Marcelo José Colaço

Olivier Fudym

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 147-155.

1. Problemas de Estimativa de Estado. 2. Filtros Bayesianos. 3. Transferência de calor. 4. Combustão. I. Orlande, Helcio Rangel Barreto *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

O poder dos sonhos, da coragem e da persistência.

Todas as pessoas que realizaram grandes coisas entenderam o poder dos sonhos, da coragem e persistência. Mesmo quando os seus sonhos sofreram revezes, frustrações, adiamentos e perdas, eles nunca desistiram. Henry Ford foi à falência antes de criar o famoso Ford modelo T. O inventor Thomas Edison falhou milhares de vezes antes de conseguir inventar a lâmpada elétrica. Walt Disney foi demitido por falta de talento, e faliu duas vezes antes de conseguir dar vida ao Mickey, Pato Donald e à Disneylândia. Os Beatles foram desencorajados várias vezes por empresários musicais, pois “aquele estilo de música não teria futuro”. Michael Jordan foi aconselhado a tentar outro tipo de esporte, pois “não tinha talento para jogar basquete”. Ayrton Senna, famoso por sua habilidade e coragem para dirigir na chuva, no início perdeu a maior parte das corridas porque não conseguia dirigir em pista molhada. Martin Luther King Jr, famoso por sua influência na contenção da discriminação racial é lembrado até hoje pela expressão: “eu tenho um sonho”. Nunca em sua vida, pare de sonhar, ter coragem de fazer e persistir! Alguns sonhos se mostrarão ilusórios; outros o(a) desapontarão; outros ainda terão de ser revistos para se tornarem realidade. Mas é a nossa capacidade de sonhar e visualizar um mundo melhor, somado à coragem de fazer e persistir, que irá transformar os sonhos na realidade de um mundo melhor. Os grandes realizadores e líderes sempre foram guiados e impulsionados por seus sonhos e visões, e só chegaram lá pela força da coragem e persistência. Nossos sonhos e visões nos dão força para ir adiante, mesmo quando tudo parece estar perdido e não ter mais solução. Muitas vezes parecem estar fora de nosso campo de visão, mas tenha a certeza, nunca estarão fora do nosso alcance. Sonhe grande, aja corajosamente, persista em seu sonho e em sua ação!

Wilson Meiler

Dedico essa conquista as pessoas que acreditaram nos meus sonhos, e que sonharam junto comigo. Os meus pais, José B., Wanda, Jandeir Idiocesane e Cilma, meus irmãos, Wallace e Leandro, minha irmã Poliana e o amor da minha vida minha esposa, Aline.

AGRADECIMENTOS I

Esta tese é dedicada às 4 pessoas mais importante da minha vida: Primeiramente meus pais, José Bernardino da Silva e Wanda de Oliveira Betencurte da Silva. Em seguida meu irmão Wallace, que como todo bom irmão que se preze me aturou e me atazanou esses anos todos. E finalmente minha esposa, Aline, meu coração, meu grande amor, a segunda família que Deus me deu, que aceitou a loucura de viver comigo até o fim dos tempos. Amo vocês.

AGRADECIMENTOS II

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado tranquilidade, sabedoria e perseverança para conquistar mais etapa do meu desenvolvimento acadêmico e profissional e por estar sempre comigo nos momentos mais difíceis.

Aos meus familiares, em especial à minha mãe, meu pai, meu irmão, Poliana, Leandro, Jandeir e Cilma, pelo carinho, apoio, confiança e incentivo que foram essenciais para que eu chegasse até aqui.

Em especial, agradeço a minha esposa, Aline, por estar sempre ao meu lado, por sempre estar disposto a me escutar, pelo carinho, companheirismo, paciência, compreensão... Enfim, por tudo e tantas coisas que se torna até difícil expressar!

Agradeço aos amigos do Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor (LTTC) e do Laboratório Rapsodee por esses anos de convivência e apoio. Porque todos marcaram muito e de forma especial esses últimos 4 anos da minha vida! Em especial, aos amigos Lamien Bernard, Jean Pinho, José Martim Costa Junior, Souleymane Zio, Bianca Borem, Ana Claudia Magalhães, Evaldiney Monteiro, Vinicius Sauer, Bruno Britto, Diego Cardoso Estumano, José Mir Costa, Apoena Calil, Antonio Alves, Ivana Cerqueira, Milena Vilar, Henrique Massard, Juliane de Almeida, Analice Brandi, Suenia Lacerda, William Montes, Jacqueline Azevedo, Nayane Portela, Mélanie Rochoux, Julio Cezar, Paulo Veiga e Paulo Cezar.

Também agradeço a todos os amigos que fiz no LAVI, LMT e Ecole de Mines d'Albi - Carmaux.

Aos professores Helcio Rangel Barreto Orlande, Marcelo José Colaço e Olivier Fudym pela paciência, amizade, incentivo, conselhos acadêmicos, pessoais e

profissionais e, principalmente, pela orientação em todos os passos do trabalho e por sua confiança na minha capacidade de concluí-lo.

Ao professor Renato Machado Cotta e Carolina COTTA pela amizade.

À CAPES, ao CNPq e à EMAC pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

APLICAÇÃO DE FILTROS DE PARTÍCULAS PARA A ASSIMILAÇÃO DE
DADOS EM PROBLEMAS DE FRONTEIRA MÓVEL

Wellington Betencurte da Silva

Novembro/2012

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Marcelo José Colaço

Olivier Fudym

Programa: Engenharia Mecânica

Muitas áreas da engenharia requerem a estimação de estado de sistemas dinâmicos. A modelagem em espaço de estado concentra-se no vetor de variáveis de estados, o qual, por sua vez, contém todas as informações relevantes para descrever o sistema desejado. Os problemas de estimação do estado também são conhecidos como problemas inversos não estacionários. Eles são de grande interesse em inúmeras aplicações práticas, a fim de produzir estimativas sequenciais das variáveis desejadas, através de modelos estocásticos e medidas experimentais. Isso é feito de tal maneira que o erro seja minimizado estatisticamente. Neste trabalho é utilizado o conceito de estimativa de estado combinada com os filtros Bayesianos da classe dos filtros de partículas em problemas inversos de transferência de calor e combustão. Esses algoritmos foram aplicados a um problema de condução de calor transiente unidimensional, a um problema de solidificação e a um problema de propagação de incêndio.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

APPLICATION OF PARTICLE FILTERS FOR DATA ASSIMILATION IN MOVING
BOUNDARY PROBLEMS

Wellington Betencurte da Silva

November/2012

Advisors: Helcio Rangel Barreto Orlande

Marcelo José Colaço

Olivier Fudym

Department: Mechanical Engineering

Many areas of engineering require state estimation of dynamic systems. State space modeling focuses on the vector of state variables, which, in turn, contains all relevant information to describe the desired system. The state estimation problems are also known as transient inverse problems. They are of great interest in many practical applications, in order to produce sequential estimates of the desired variables through stochastic models and experimental measurements, in such a way that the error is statistically minimized. In this work we solve state estimation problems with the Bayesian class of particle filters, in heat transfer and combustion. These algorithms have been applied to problems of one-dimensional transient heat conduction, solidification and fire propagation.

Résumé de Thèse présentée à la COPPE/UFRJ en vue de l'obtention du titre de Docteur en Sciences (D.Sc)

APPLICATION DES FILTRES PARTICULAIRES A L'ASSIMILATION DE
DONNEES EN PROPAGATION DE FRONTS THERMIQUES

Wellington Betencurte da Silva

Novembre/2012

Encadrants: Helcio Rangel Barreto Orlande

Marcelo José Colaço

Olivier Fudym

Département: Génie Mécanique

Bon nombre de problèmes d'ingénierie requièrent l'estimation de l'état de systèmes dynamiques. La modélisation de l'espace des états du système est faite à travers un vecteur d'état qui contient toutes informations utiles pour la description du système. Les problèmes d'estimation d'état sont aussi connus comme problèmes inverses non stationnaires. Ils sont d'un grand intérêt dans de nombreuses applications pratiques, afin de produire une estimation séquentielle des variables souhaitées, à partir de modèles stochastiques et de mesures expérimentales. Ceci dans le but d'optimiser statistiquement l'erreur. Ce travail a pour objectif d'appliquer des méthodes de Filtres à Particules à des problèmes de thermique et de combustion. Ces algorithmes sont appliqués successivement à un problème de conduction de chaleur, à un problème de solidification et finalement à un problème de propagation d'incendies.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	XI
-------------------------------	-----------

LISTA DE TABELAS.....	XVI
------------------------------	------------

LISTA DE SIGLAS	XVII
------------------------------	-------------

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Motivação e Objetivos.....	1
1.2	Organização do trabalho	4
2	REVISÃO BIBLIOGRAFICA	5
2.1	Inferência Bayesiana.....	5
2.2	Filtros Bayesianos	6
2.3	O Filtro de Kalman.....	13
2.4	Problemas Inversos utilizando filtros de partículas.....	15
3	MÉTODOS DE MONTE CARLO SEQUENCIAL.....	17
3.1	Inferência Bayesiana	17
3.2	Integração de Monte Carlo	18
3.3	Método de Simulação – Amostragem por Importância	19
3.4	Problema de Estimação de Estado	20
3.5	Filtro de Partículas	23
3.5.1	O filtro amostragem por importância sequencial (SIS).....	25
3.5.2	O filtro amostragem por importância e reamostragem sequencial (SIR).....	27
3.5.3	O filtro auxiliar de partícula ou amostragem e reamostragem por importância auxiliar (ASIR)	31
4	PROBLEMAS FÍSICOS E FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS	35
4.1	Problema de Condução de Calor	35
4.1.1	Adimensionalização do Problema de condução de calor.....	36
4.1.2	Problema Inverso usando estimativa de estado e filtros de partículas para o problema de condução.....	37
4.2	Problema de Solidificação	42

4.2.1	Problema Inverso usando estimativa de estado e filtros de partículas para o problema de solidificação.....	46
4.3	Problema de Propagação de Incêndio.....	50
4.3.1	Propagação de Incêndio em um Campo.....	52
4.3.2	Problema Inverso para propagação de incêndio em um campo	56
4.3.3	Introdução do modelo de ROTHERMEL	60
4.3.4	Problema Inverso para incêndio em escala de laboratório	64
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	71
5.1	Resultados do problema inverso de condução de calor.....	72
5.2	Resultados do Problema Inverso de solidificação.....	89
5.3	Resultados do Problema Inverso de Propagação de Incêndio em um Campo	96
5.4	Resultados do Problema Inverso de Propagação de Incêndio em Escala de laboratório	104
6	CONCLUSÕES.....	145
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	147
Apêndice A	156
A.1	Modelo de Rothermel	156
A.1.1	Propagação do fogo sem vento e sem condições do terreno (elevação)	158
A.1.2	Propagação do fogo com vento e sem condições do terreno (elevação).....	158
Apêndice B	160
B.1	SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DE CONDUÇÃO....	160

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1: Passos da Predição e atualização para filtros Bayesianos (KAPIO e SOMERSALO, 2004).	23
Figura 3.2: Esquema dos filtros de partículas para problemas inversos.	25
Figura 3.3: Reamostragem (ZHE, 2002).	28
Figura 4.1: Esquema do Problema de condução de calor	35
Figura 4.2: Esquema do Problema Não Linear (ÖZISIK, 1980).	42
Figura 4.3: Incêndios Florestais (ROTHERMEL, 1972).	50
Figura 4.4: As etapas do mecanismo de ignição (DELMOTTE <i>et al</i> , 2011).	51
Figura 4.5: Modelo da variavel de progresso (SILVA <i>et al</i> , 2012).	53
Figura 4.6: Variável de progresso c DELMOTTE <i>et al</i> (2011).	62
Figura 4.7: Propagação da frente da chama usando equação do Level set DELMOTTE <i>et al</i> (2011).	63
Figura 4.8: Informação da velocidade do vento.	66
Figura 4.9: Representação da frente da chama dado pelas linhas negras com frequência de 14 s, começando em 64 segundos até 106 segundos.	67
Figura 4.10: Extração da frente da chama (direita) do campo de temperatura (esquerda) em $t = 106s$	67
Figura 5.1: Fluxo de Calor degrau.	73
Figura 5.2: Fluxo de Calor triangular	73
Figura 5.3: Resultado Resultado do Filtro SIR para o Fluxo Degrau.	77
Figura 5.4: Melhor Resultado do filtro SIR com o Intervalo de 99% de confiança.	78
Figura 5.5: Resultado do Filtro ASIR para o Fluxo Degrau.	78
Figura 5.6: Resultado do filtro ASIR com o Intervalo de 99% de confiança.	79

Figura 5.7: Resultado do Filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial para o Fluxo Degrau.	79
Figura 5.8: Resultado do Filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial com o Intervalo de 99% de confiança.	80
Figura 5.9: Resultado do Filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança para o Fluxo Degrau.	80
Figura 5.10: Resultado do Filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança com o Intervalo de 99% de confiança.	81
Figura 5.11: Resultado do Filtro SIR para o Fluxo Triangular.	85
Figura 5.12: Melhor Resultado do filtro SIR com o Intervalo de 99% de confiança.	85
Figura 5.13: Resultado do Filtro ASIR para o Fluxo Triangular.	86
Figura 5.14: Resultado do filtro ASIR com o Intervalo de 99% de confiança.	86
Figura 5.15: Resultado do Filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial para o Fluxo Triangular	87
Figura 5.16: Melhor Resultado do filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial com o Intervalo de 99% de confiança.	87
Figura 5.17: Resultado do Filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança para o Fluxo Triangular.	88
Figura 5.18: Melhor Resultado do filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança com o Intervalo de 99% de confiança.	88
Figura 5.19: Temperatura medida sem ruído.	89
Figura 5.20: Temperatura medida com ruído.	90
Figura 5.21: Estimação da Fronteira de Solidificação.	91
Figura 5.22: Resultado do filtro SIR para a fronteira de solidificação.	92
Figura 5.23: Resultado do filtro ASIR para a fronteira de solidificação.	92

Figura 5.24: Estimação do Fluxo de Calor.....	93
Figura 5.25: Resultado do filtro SIR para o fluxo de calor.	93
Figura 5.26: Resultado do filtro ASIR para o fluxo de calor.	94
Figura 5.27: Estimação do Campo de Temperatura para tempo=1 segundo.	95
Figura 5.28: Estimação do Campo de Temperatura para tempo=10 segundos.	95
Figura 5.29: Estimação do Campo de Temperatura para tempo=100 segundos.	96
Figura 5.30: Velocidade de propagação local do fogo $s_{L,KPP}$ γ (.	97
Figura 5.31: Dados Medidos	97
Figura 5.32: Resultados dos filtros Bayesianos.....	98
Figura 5.33: Resultado filtro SIR NP=100.....	99
Figura 5.34: Resultado filtro SIR NP=500.....	99
Figura 5.35: Resultado filtro ASIR NP=100.....	100
Figura 5.36: Vegetação Inicial.....	101
Figura 5.37: Propagação do fogo em 0 segundo	101
Figura 5.38: Propagação do fogo em 200 segundos	102
Figura 5.39: Propagação do fogo em 400 segundos.	102
Figura 5.40: Propagação do fogo em 600 segundos	103
Figura 5.41: Propagação do fogo em 800 segundos	103
Figura 5.42: Comparação entre a fronteira real e a fronteira gerado pelo parâmetros de Rothermel's.	106
Figura 5.43: Resultado do filtro SIR para a fronteira do fogo.....	108
Figura 5.44: Resultado do filtro ASIR para a fronteira do fogo.....	110
Figura 5.45: Resultado do filtro Bayesiano para o teor de umidade.....	114
Figura 5.46: Resultados para a relação superfície/volume.....	118

Figura 5.47: Comparação entre as dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro SIR com $N=100$	120
Figura 5.48: Comparação entre as dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro ASIR com $N=50$	121
Figura 5.49: Comparação para as fronteiras de propagação do fogo variando constante experimental C_f	123
Figura 5.50: Resultado do filtro SIR para a fronteira do fogo	126
Figura 5.51: Resultado do filtro ASIR para a fronteira do fogo.....	128
Figura 5.52: Resultado do filtro Bayesiano para o teor de umidade.....	132
Figura 5.53: Resultado do filtro Bayesiano para a relação superfície/volume.....	136
Figura 5.54: Resultado do filtro Bayesiano para a estimação da velocidade do vento.	
140 Figura 5.55: Comparação entre as dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro SIR=200.	142
Figura 5.56: Comparação entre as dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro ASIR=50.	144

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Filtros de Partículas: Diferentes Algoritmos.....	24
Tabela 3.2: Algoritmo do filtro de Partícula SIR	30
Tabela 3.3: Algoritmo do filtro de Partícula ASIR.....	33
Tabela 4.1: Algoritmo do filtro SIR para o problema de condução de calor	40
Tabela 4.2: Algoritmo do filtro ASIR para o problema de condução de calor	41
Tabela 4.3: Algoritmo do filtro SIR para o problema de solidificação	48
Tabela 4.4: Algoritmo do filtro ASIR para o problema de solidificação.....	49
Tabela 4.5: Posições dos sensores da variável de progresso	57
Tabela 4.6: Algoritmo do filtro SIR para o problema de propagação de incêndio em um campo.	58
Tabela 4.7: Algoritmo do filtro ASIR para o problema de propagação de incêndio em um campo.	59
Tabela 4.8: Algoritmo do filtro SIR para o problema de incêndio em escala de laboratório.	68
Tabela 4.9: Algoritmo Algoritmo do filtro ASIR para o problema de incêndio em escala de laboratório.....	69
Tabela 5.1: Resultado para o Fluxo Degrau	74
Tabela 5.2: Resultado para o Fluxo Triangular	82
Tabela 5.3: Resultados do problema de solidificação.....	90
Tabela 5.4: Resultados dos filtros SIR e ASIR : Erros RMS e tempo CPU	97
Tabela 5.5: Erros RMS e tempo CPU	105
Tabela 5.6: Comparação com e sem a estimação da velocidade do vento.....	122

Tabela 5.7: Erros RMS e tempo CPU	124
---	-----

LISTA DE SIGLAS

ABC: Cálculo Aproximado Bayesiano
AFP: Filtro Auxiliar de Partícula
ASIR: Filtro Amostragem e Reamostragem por Importância Auxiliar
CFD: Dinâmica dos Fluidos Computacional
EKF: Filtro de Kalman Estendido
FP: Filtro de Partícula
FPB: Filtro de Partícula Bootstrap
IS: Amostragem por Importância
MCMC: Monte Carlo com Cadeia de Markov
ROS: Velocidade de Propagação do fogo
RMS: Erro Quadrático Médio
RPF: Filtro de Partícula Regularizado
SIR: Amostragem por Importância e Reamostragem Sequencial
SIS: Amostragem por Importância Sequencial
SMC: Monte Carlo Sequencial

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação e Objetivos

Os incêndios florestais são um dos maiores desastres naturais que ameaçam o mundo. Cada ano, milhares de hectares de áreas cobertas de vegetação são consumidas pelo fogo, colocando em risco toda a fauna e flora. Sendo assim o estudo do comportamento do fogo tornou-se uma necessidade para qualquer sociedade, tanto para a prevenção e combate aos incêndios, como para os setores que aproveitam o fogo como fator essencial ao seu desenvolvimento. Por isso, prever a posição da fronteira da chama e estimar os parâmetros que influenciam sua velocidade em cada tempo, a partir de imagens térmicas obtidas de aviões ou satélites, é um problema inverso complexo. Esta dificuldade advém da grande quantidade de dados a serem tratados, estes com uma baixa relação sinal/ruído e a grande quantidade de parâmetros a serem estimados. Desta maneira, a implementação de técnicas de estimação são de grande importância na redução dos custos computacionais e na obtenção da solução do problema inverso em um tempo real.

Nos últimos 50 anos, inúmeras pesquisas foram realizadas sobre o comportamento dos incêndios florestais. Isso tem proporcionado o aparecimento de diversos modelos de propagação do fogo. Esses modelos são considerados ferramentas para prever a taxa propagação da frente da chama quando os fatores de propagação são descritos; isto é, velocidade e direção do vento, inclinação do local, propriedades da vegetação como: carga combustível, umidade e etc.

Esses modelos criados para tentar simular a propagação ou comportamento do fogo, são considerados como problemas diretos. Onde o objetivo desses tipos de problemas é de determinar o campo de temperatura no meio, quando todas as características causais (condição de contorno, propriedades termofísicas, etc.) são especificadas.

O problema de prever as fronteiras da chama e estimar os parâmetros que influenciam essa velocidade da chama é considerado um problema inverso, pois estes são matematicamente classificados como mal-postos, ou seja, sua solução é muito

sensível a erros experimentais. O objetivo do problema inverso é estimar uma ou mais dessas características causais, a partir da medida da resposta do sistema.

Em problemas inversos os métodos determinísticos são baseados na minimização da norma de mínimos quadrados levam a uma estimação pontual sem considerar a natureza estatística das incertezas, e sem quantificar as incertezas na solução inversa. Por outro lado, a inferência Bayesiana fornece a solução do problema inverso formulando uma descrição probabilística completa dos parâmetros desconhecidos e das incertezas associadas, dados os valores experimentais das medidas.

Os problemas de estimação do estado também são conhecidos como problemas inversos não estacionários (KAPIO e SOMERSALO, 2004). Eles são de grande interesse em inúmeras aplicações práticas, a fim de produzir estimativas sequenciais das variáveis desejadas, através de modelos estocásticos e medidas experimentais. Isso é feito de tal maneira que o erro seja minimizado estatisticamente (MAYBECK, 1979).

Problemas de estimação de estado são resolvidos com os chamados filtros Bayesianos. Na abordagem Bayesiana é feita uma tentativa para utilizar todas as informações disponíveis, com o intuito de reduzir a incerteza presente em um problema de inferência ou decisão. As novas informações obtidas são combinadas com as informações anteriores para formar a base para procedimentos estatísticos. O mecanismo formal utilizado para combinar a nova informação com a informação anteriormente disponível é conhecido como teorema de Bayes.

O filtro Bayesiano mais conhecido é o filtro de Kalman (KALMAN, 1960). No entanto, a aplicação desse tipo de filtro é limitada aos modelos lineares com ruídos aditivos e gaussianos. No passado foram desenvolvidas extensões do filtro de Kalman para casos menos restritos, usando-se técnicas de linearização, como por exemplo, o filtro de Kalman Estendido (RIBEIRO, 2004). Da mesma forma, foram desenvolvidos os filtros de partículas, a fim de serem aplicados a problemas não lineares ou com erros não gaussianos, pois esses filtros permitem a exploração do estado de espaço. Porém, de acordo com ARULAMPALAM et al (2001) o filtro de Kalman Estendido não apresenta bons resultados para problemas de altas dimensões, ou seja (em que), muitos parâmetros a serem estimados.

Desta maneira, este trabalho pretende mostrar a eficiência dos filtros de partículas predizerem as fronteiras da chama e na estimação de parâmetros e/ou funções

que influenciam na propagação de um incêndio em escalas de laboratório, utilizando medidas experimentais, realizadas com uma câmera de termografia por infravermelho.

A originalidade deste trabalho reside na combinação do problema de estimação de estado junto com os filtros de partículas aplicada ao problema inverso via inferência Bayesiana, em que o objetivo é estimar o teor umidade da vegetação, a velocidade do vento, a relação superfície/volume das partículas e as fronteiras da chama, e em ambos os casos variando no espaço e no tempo.

Nesse trabalho Inicialmente foram aplicados diferentes algoritmo dos filtros de partículas em um problema de condução de calor transiente unidimensional, com o objetivo de estimar dois tipos diferentes de fluxos de calor. Essa fase inicial foi considerada como a etapa de compreensão dos algoritmos.

Em seguida, foram aplicados os filtros Bayesianos a um problema de solidificação, transiente em um meio semi-infinito, com o objetivo de estimar a fronteira de solidificação, o calor latente e o campo de temperaturas. Essa segunda etapa, foi uma preparação para o problema de propagação de incêndio.

Por fim, foi feita uma aplicação em um problema de propagação de incêndio, sendo o problema chave desse trabalho. Essa aplicação foi dividida em duas partes: a primeira aplicação foi para um incêndio em um campo utilizando medidas simuladas com ruído, na qual o objetivo era de recuperar o campo de temperatura e a velocidade de propagação do fogo, a qual depende de uma única variável que apresenta toda a física da chama. Na segunda etapa, tem-se o problema chave, pois tem-se um incêndio em escala de laboratório utilizando medidas experimentais, em que o alvo foi estimar a relação área de superfície/volume das partículas, o teor umidade do leito do combustível e ainda, foi acrescentada a estimação da amplitude do vento.

Esta tese foi desenvolvida em cotutela entre a Universidade Federal do Rio de Janeiro, no Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor da COPPE/UFRJ e a Escola de Minas de Albi-Carmaux (EMAC), no Laboratório de Microfluidos do Centro de Pesquisa de Albi em Engenharia de Processos, Sólidos Segregados, Energia e Meio Ambiente - RAPSODEE.

1.2 Organização do trabalho

O capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica dos filtros de partículas, mostrando alguns aspectos relevantes deste método, sua definição e suas características relativas à estimação de parâmetros, o uso da inferência Bayesiana em problemas inversos sua metodologia e aplicação.

O capítulo 3 é apresentado os métodos Sequenciais de Monte Carlo, onde introduzimos a inferência Bayesiana, integração de Monte Carlo, a amostragem por importância, a ideia de estimativa de estado e por fim os filtros de partículas.

O capítulo 4 apresenta o problema de condução, o problema de solidificação e o problema de propagação de incêndio, descrevendo a física e as formulações matemáticas desses problemas estudados. Nesse capítulo também é mostrado a solução do problema inverso sobre o problema de estimação de estado combinado com os filtros de partículas, para cada um desses problemas propostos.

No Capítulo 5 são apresentados e discutidos os resultados obtidos pelos filtros de partículas apresentados no capítulo 3, aplicados aos problemas descritos no capítulo 4.

Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões referentes ao trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRAFICA

A presente seção apresenta uma revisão bibliográfica dos trabalhos disponíveis na literatura para os principais temas tratados nesta tese, que são: Inferência Bayesiana, os Filtros Bayesianos e a aplicação de filtros bayesianos da classe de filtros de partículas em problemas inversos de transferência de calor.

2.1 Inferência Bayesiana

A classe de métodos denominada Monte Carlo Sequencial (SMC), também denominado de filtro de partículas, foi originalmente introduzida no início dos anos 50 pelos físicos e se tornou muito popular nos últimos anos em estatística e campos relacionados. Tais métodos são amplamente utilizados para resolver problemas sequenciais de Inferência Bayesiana. O uso da teoria Bayesiana em estatística começou a crescer a partir da década de 60, principalmente com os avanços computacionais. Essa teoria é baseada no teorema de Bayes, em que a distribuição *a priori* fornece as informações disponíveis da variável desconhecida antes de se levar em consideração medidas experimentais do processo em análise. A *função de verossimilhança* tem como objetivo *corrigir* a informação inicial, embora essa idéia não significa necessariamente que a informação estivesse equivocada: essa informação poderia estar incompleta, por isso essa função vai incorporando mais e mais informação, a fim de encontrar a variável desconhecida, ou seja, a *distribuição a posteriori*.

GAMERMAN (1997) apresentou uma abordagem simples e consistente da teoria e aplicação dos métodos MCMC – *Markov Chain Monte Carlo*. Em seu livro, as técnicas MCMC são descritas de forma clara, objetivando alcançar uma larga faixa de público, nas diversas áreas do conhecimento, com interesse em simulação estocástica por inferência Bayesiana.

WANG e ZABARAS (2004, 2005, 2006), apresentaram os conceitos e aplicação da inferência Bayesiana direcionados à área de problemas inversos em transferência de calor. Nestas referências, problemas unidimensionais e bidimensionais de condução de calor por inferência Bayesiana foram resolvidos e discutidos tanto para a estimativa do

fluxo de calor na fronteira de um sólido, como para a estimativa do termo fonte, propriedades termofísicas e erro de localização de termopares.

KAPIO e SOMERSALO (2004) apresentaram em seu livro texto desde conceitos básicos e clássicos de problemas inversos como a estimativa por Máxima Verossimilhança e o método do Gradiente Conjugado. Também foram apresentados os métodos de regularização clássicos como a regularização de Tikhonov e métodos iterativos de regularização, como o método de Landweber-Fridman e o de Kaczmarz. Os métodos estatísticos de inferência são apresentados para problemas de estimação de parâmetros distribuídos espacialmente.

2.2 Filtros Bayesianos

Os Filtros Bayesianos são métodos probabilísticos que utilizam um algoritmo recursivo para estimativa e atualização de estados dinâmicos de um sistema a partir da leitura de sensores, comandos, modelos, bases de conhecimento e outros. Existem vários tipos de filtros Bayesianos, sendo que os principais são o Filtro de Kalman e o Filtro de Partículas.

Durante os anos de 1960, Rudolf Emil Kalman foi inovador no desenvolvimento de uma teoria rigorosa aplicada a sistemas de controle e em outras áreas. Ele publicou seu artigo seminal descrevendo uma solução recursiva do problema da filtragem linear de dados discretos (BERNARDI, 1999). Desde então, motivado pelos avanços da computação digital, o filtro de Kalman foi assunto de extensas pesquisas e aplicações, principalmente nas áreas de navegação autônoma ou assistida.

Já o filtro de Kalman é um conjunto de equações matemáticas que constitui um processo recursivo eficiente de estimação, uma vez que o erro quadrático é minimizado (WELCH e BISHOP, 2004). Através de medição da “variável de observação”, outra variável não observável denominada “variável de estado”, pode ser estimada eficientemente. Podem ser estimados os estados passados, o estado presente e até mesmo os estados futuros. O filtro de Kalman é um procedimento aplicável quando os modelos estão escritos sob a forma espaço-estado. Além disso, o filtro de Kalman permite a estimação dos parâmetros desconhecidos do modelo através da maximização da verossimilhança. Com o avanço computacional, o filtro de Kalman e suas extensões a problemas não lineares representam o produto mais largamente utilizado dentro da

teoria de controle moderno. Um exemplo dessas extensões é o filtro de Kalman Estendido ou EKF (RIBEIRO, 2004).

A idéia básica do filtro de Kalman Estendido consiste em linearizar o sistema a cada instante de tempo em torno do estado estimado mais recente. Se as não linearidades são suficientemente suaves, pode-se fazê-lo aplicando a aproximação de Taylor de primeira ordem nas funções não lineares em torno do estado estimado.

Os métodos Monte Carlo Sequenciais (Sequential Monte Carlo - SMC) ou filtros de partículas são métodos numéricos de integração, adequados para lidar com problemas não lineares e não Gaussianos. Na década de sessenta, grande atenção foi devotada a estes problemas. Entretanto, somente com o aumento do poder computacional foi possível tornar o seu uso mais corrente. Estes métodos destacam-se com vantagens sobre os demais no que se refere ao cálculo da distribuição posterior de probabilidades.

RUBIN (1987) foi um dos primeiros pesquisadores a sugerir uma aproximação para a distribuição posterior de probabilidades, utilizando a alternativa de amostragem por distribuição de importância e também foi o primeiro trabalho a mencionar o algoritmo SIR.

GORDON *et al* (1993) desenvolveram o algoritmo do filtro de bootstrap, proposto para a execução dos filtros Bayesianos recursivos. Neste filtro, as densidades requeridas pelo vetor de estado foram representadas por amostras randômicas, que foram propagadas e atualizadas pelo algoritmo. O método não era limitado pelas suposições da linearidade ou ruídos Gaussianos. Portanto, esse filtro poderia ser aplicado a outros estados de transição ou outros tipos de modelos. Os autores também mostraram que os resultados do filtro Bootstrap foram muito superiores ao filtro de Kalman estendido.

LIU e CHEN (1998) propuseram uma estrutura computacional baseada nos métodos de Monte Carlo para sistemas dinâmicos. Eles mostraram que todos os métodos apresentam uma combinação desses ingredientes: a amostragem por importância e reamostragem, rejeição da amostragem e iteração da cadeia de Markov. Esse trabalho teve seu foco na implementação do método Monte Carlo Sequencial, ou seja, os filtros de partículas. Neste artigo, os autores destacaram as vantagens e desvantagens da utilização da reamostragem nos filtros de partículas. Os autores

demonstraram sua melhor eficiência em relação aos outros filtros bayesianos através de exemplos em econometria e engenharia.

PITT *et al* (1999) fizeram um estudo das dificuldades do filtro de partículas proposto por GORDON *et al* (1993). PITT *et al* (1999) mostraram que o algoritmo do filtro SIR não é robusto para *outliers* (um *outlier* é um dado observado que é numericamente distante dos outros dados) por duas razões: eficiência da amostragem e a não confiabilidade da predição da distribuição. Por isso, os autores introduziram uma variável auxiliar dentro do filtro de partícula para superar esse primeiro problema, construindo uma poderosa estrutura para o filtro SIR, sendo mais flexível e confiável.

CARPENTER *et al* (1999) apresentaram um trabalho baseado no algoritmo Bootstrap ou filtro amostragem e reamostragem por importância sequencial, apontando a necessidade de monitoramento do filtro, a fim de prevenir o colapso das partículas. Os autores introduziram ao filtro SIR uma nova etapa, onde de acordo com os pesos normalizados e o tamanho da amostra, deveria se ter uma nova reamostragem na qual todas as partículas teriam o mesmo peso, com o intuito de evitar o empobrecimento da amostra, evitando com isso o colapso do sistema.

DOUCET *et al* (2000) apresentaram uma revisão geral dos métodos de simulação para a distribuição a posterior. Dentre essas classes de métodos, os autores destacaram os filtros Bayesianos para modelos dinâmicos que variam com o tempo, onde a estrutura da amostragem por importância (Importance Sampling (IS)) foi desenvolvida para unificar muitos destes métodos que foram propostos nas últimas décadas em vários campos. Os autores mostraram como incorporar métodos de linearização locais já existentes na filtragem Bayesiana. Por fim, foi desenvolvido um algoritmo de previsão, suavização e avaliação para os modelos dinâmicos.

Um ano antes de lançar o livro Sequential Monte Carlo Methods in Practice, DOUCET *et al.*, (2000) apresentaram um trabalho de revisão geral dos métodos de simulação sequencial para problemas tipicamente não lineares e com erros não Gaussianos, os quais são de especial interesse para a filtragem Bayesiana e para modelos dinâmicos em séries temporais. Tais métodos apresentavam uma estrutura baseada na amostragem por importância sequencial, juntamente com a incorporação de métodos de linearização locais. Por fim, eles descreveram algoritmos de previsão, suavização e avaliação do risco para o modelo dinâmico.

Os filtros Bayesianos que misturam Parâmetros constantes e Variáveis de Estado apareceram no fim dos anos 80 e no início dos anos 90, a fim de estimar o estado dos sistemas dinâmicos, usando aproximações numéricas para encontrar sequencialmente a distribuição a posteriori, com estruturas de modelos de misturas (mixture modelling). Este novo algoritmo Bayesiano que utiliza a união dos estados que variam com o tempo e os parâmetros fixos, foi considerada uma nova classe de modelos adaptativos (HARRISON e STEVENS 1976, SMITH e WEST 1983, WEST e HARRISON 1997).

LIU e WEST apresentaram um novo método em 2000, onde introduziram uma nova abordagem que permite a suavização e a regeneração da amostra do modelo dos parâmetros sem a perda de informação. Este novo algoritmo foi chamado de filtro para Estimativa Combinada de Parâmetros e Variáveis de Estado, um método baseado no filtro ASIR. Porém o filtro para Estimativa Combinada de Parâmetros e Variáveis de Estado apresenta kernels locais sendo considerados como as variáveis auxiliares. As partículas são geradas de uma distribuição normal com média baseada nesses kernels locais e a variância dada por uma matriz de covariância multiplicada por uma constante. Esses novos artifícios têm como objetivo controlar a evolução das partículas, a fim de evitar a degeneração. LIU e WEST (2000) apresentaram algumas aplicações em problemas de séries temporais em finanças.

ARULAMPALAM *et al* (2001) apresentaram um trabalho de revisão para os algoritmos Bayesianos tanto para problemas lineares com erros Gaussianos, quanto para problemas não lineares e com erros não Gaussianos, com ênfase no filtro de partículas. Vários tipos de filtros foram descritos, como: o filtro SIR, o filtro ASIR, o Filtro de Partícula Regularizado (RPF), entre outros. Todos esses métodos, porém, foram baseados na estrutura do algoritmo Amostragem por Importância Sequencial (Sequential Importance Sampling (SIS) algorithm).

ANDRIEU *et al* (2002) propuseram um método de estimação do estado recursivo com um modelo parcialmente Gaussiano. O algoritmo foi baseado no método Monte Carlo Sequencial com a predição da constante de normalização dada pelo filtro de Kalman. Esse trabalho teve como objetivo a aplicação do método Monte Carlo Sequencial em problemas de estimação de parâmetros ou identificação do sistema e em controle.

CRISAN e DOUCET (2002) fizeram um trabalho sobre os métodos de filtragem de partículas, ou seja, os métodos Monte Carlo Sequencial (SMC). Nesse trabalho apresentaram um estudo geral e rigoroso dos métodos de SMC, onde destacaram cada passo do método. Os autores apresentaram o passo de amostragem de importância usando o kernel de transição, o passo de reamostragem, a adição do passo MCMC depois do procedimento de reamostragem e por fim as convergências dos resultados a fim de tornar o método Monte Carlo Amostragem Sequencial, mais atraente e acessível aos leitores.

CHOPIN (2004) utilizou o teorema do limite central para mostrar a estabilidade das partículas geradas pelos métodos Monte Carlo sequencial. Esses algoritmos desempenham a aproximação de Monte Carlo para a sequência de distribuição de interesse π_t . Nesse trabalho foi desenvolvido um algoritmo muito diferente do algoritmo sequencial Monte Carlo padrão, onde o Teorema do Limite Central fornecia as medidas exatas dos erros de Monte Carlo, através da variância assintótica, gerando uma excelente eficiência do algoritmo. CHOPIN mostrou que a aplicação do teorema do Limite Central é muito promissora para avaliar a estabilidade dos filtros de partículas em termos de precisão de estimativas computacionais, através do comportamento da variância no tempo.

VICTOR *et al* (2004) apresentaram uma aplicação do filtro de Kalman e dos filtros de partículas SIR e ASIR para um sistema de navegação inercial, onde os filtros eram destinados à estimação de estados em sistemas, sendo baseados no método de Monte Carlo sequencial. O objetivo desse trabalho foi aplicar os filtros de partículas e o filtro de Kalman à estimação de trajetórias e apontar as vantagens e desvantagens de cada um desses filtros, comparando o seu desempenho.

CHEN *et al* (2005) propuseram uma nova abordagem para os filtros de partículas baseado no método Monte Carlo sequencial como uma alternativa para a tarefa de estimação. Os filtros de partículas apresentam algumas questões de implementações tais como: a degeneração das partículas, a seleção da densidade importância e o número de partículas. CHEN *et al* (2005) mostraram que abordagem do filtro Estimativa Combinada de Parâmetro e Variável de Estado apresentou uma suavização do kernel para a estimativa robusta do modelo dos parâmetros desconhecidos que variam com o tempo. A eficácia do filtro para Estimativa Combinada de Parâmetros e Variáveis de

Estado foi demonstrada através da aplicação em um processo de polimerização, sendo os resultados comparados com os resultados obtidos pelo filtro de Kalman estendido.

Recentes métodos de simulação Bayesiana apresentaram inúmeras maneiras de avaliar a distribuição a posteriori, tanto de forma analítica ou quando a função de verossimilhança é computacionalmente intratável. Apesar de representar um avanço metodológico substancial, os métodos existentes, em razão da rejeição de amostragem ou de cadeia de Markov Monte Carlo podem ser altamente ineficientes e, portanto, exigem bem mais partículas para facilitar a implementação. Por isso, Sisson e Fan (2002) apresentaram um novo algoritmo com uma abordagem Monte Carlo sequencial que supera estas ineficiências, onde a função de verossimilhança é substituída por uma função dada pela distância Euclidiana entre os dados observados e os dados simulados pelo algoritmo. Sisson e Fan (2002) demonstraram a eficiência do novo método através de um estudo epidemiológico sobre a taxa de transmissão da tuberculose.

DEL MORAL *et al.* (2006) apresentaram um novo algoritmo para o filtro de partículas chamado de Monte Carlo com Amostragem Sequencial, o qual é um método mais preciso, pois apresenta a combinação da amostragem sequencial para as densidades em um espaço comum mensurável, com métodos MCMC e a metodologia SIS. Esse novo filtro apresenta um kernel para a evolução e seleção das partículas. Outra novidade desse algoritmo é a introdução de um kernel artificial atrasado, que permite não calcular distribuição por importância dos pesos das partículas. O kernel atrasado e o kernel de evolução apresentam uma grande influência nos cálculos dos pesos das partículas. Portanto, a escolha desses dois kernels é essencial para a eficiência do algoritmo. DEL MORAL *et al.* (2006) também descreveram os métodos IS e SIS, e alguns possíveis candidatos para o kernel de evolução. Em seguida descreveram o algoritmo do filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial e, por fim, descreveram toda axiomática que garante a eficiência e a convergência do filtro.

GU e VELOSO (2007) apresentaram uma aplicação do filtro Estimativa Combinada de Parâmetro e Variável de Estado em robótica, a fim de conseguir prever os movimentos de um robô. Esses desafios se basearam na aprendizagem dos parâmetros e no controle dos movimentos em um modelo de espaço de estado. O método lida simultaneamente com os parâmetros desconhecidos e variáveis de estado. GU e VELOSO (2007) apresentaram também os resultados de um time de futebol de

robôs, e ainda destacaram que a capacidade de aprendizagem do método permite que o programa consiga lidar de forma mais eficaz com o rastreamento dos objetos móveis.

JASRA, *et al* (2008) introduziram o método Monte Carlo com Amostragem Sequencial Iterativo, já que o método Monte Carlo com Amostragem Sequencial apresentava dificuldades para resolver problemas de simulação multidimensional e ainda apresentavam degeneração das partículas gerada pela má escolha do kernel de evolução. O método de Monte Carlo com Amostragem Sequencial Iterativo procede utilizando o método do filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial em paralelo para diferentes regiões do estado, onde são criadas populações bem diversificadas, a fim de mover as amostras em um processo iterativo para o estado de espaço desejado. Os autores também apresentaram um pequeno resumo do filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial e, em seguida, introduziram o algoritmo Monte Carlo com Amostragem Sequencial Iterativo. Também mostraram toda axiomática que garante a convergência do novo método, e apresentaram algumas aplicações do novo método, que possui desempenho significativamente melhor que o algoritmo Monte Carlo com Amostragem Sequencial. Porém os autores só recomendaram que o método fosse utilizado na situação em que o SMC original não tivesse um bom desempenho.

PETERS *et al* (2008) mostraram uma variação do método Monte Carlo sequencial com um algoritmo de rejeição parcial de controle, e demonstraram que esta variação pode ser dada pelos kernels de transição modificados do método Monte Carlo sequencial. Com isso os autores reduzirão a variância dos pesos de importância, quando comparado com o método sequencial de Monte Carlo padrão. PETERS *et al* (2008) também fizeram um estudo das propriedades teóricas do novo algoritmo, e os compararam com alguns algoritmos existentes.

DEL MORAL *et al* (2008) apresentaram um algoritmo do Cálculo Aproximado Bayesiano (ABC) combinado com algoritmo Monte Carlo com amostragem sequencial, que foi denominado de Monte Carlo Sequencial adaptativo, tal método admite uma complexidade computacional que é linear ao número de amostras e determina simultaneamente os parâmetros de simulação. Os autores mostraram que essa abordagem é capaz de calcular os níveis de tolerância de uma forma mais eficiente. No entanto, para um problema com uma grande complexidade computacional, pode ser difícil que a distribuição a priori consiga decidir qual a melhor combinação de parâmetros que é altamente dependente do modelo.

2.3 O Filtro de Kalman

O filtro de Kalman foi originalmente desenvolvido para problemas de comunicação e controle. Ele foi inventado por KALMAN (1960) como uma técnica para previsão e filtragem em sistemas lineares Gaussianos. O filtro de Kalman tem sido muito utilizado em orientação e sistemas de navegação, porém com menos frequência em aplicações em transferência de calor. Esta revisão bibliográfica apresenta livros texto, apostilas elaboradas e artigos lidando com o filtro de Kalman, o filtro de Kalman estendido e o filtro de partículas, com aplicações em transferência de calor e outras áreas de interesse em problemas de estimação de estado.

SORENSEN (1970) discute a teoria de estimação por mínimos quadrados, desde sua concepção por Gauss até sua forma moderna, desenvolvida por Kalman. As contribuições proporcionadas por Gauss são descritas e relacionadas com os desenvolvimentos que foram apresentados à época.

MAYBECK (1979) apresenta no capítulo introdutório de seu livro texto a idéia geral do filtro de Kalman, com exemplos didáticos de sua aplicação, e da importância do seu desenvolvimento mostrando aplicações em sistemas de controle, por exemplo.

JANG *et al.* (1986) usaram dois enfoques para a identificação de parâmetros e estados em sistemas não lineares, usando um exemplo de processo químico. Um deles foi o filtro de Kalman estendido para problemas não lineares. Segundo os autores, o avanço dos computadores renovava o interesse em algoritmos de controle e otimização. Uma reação exotérmica foi usada como exemplo de aplicação para a demonstração do uso do filtro de Kalman estendido para o controle ótimo de sistemas não lineares.

O primeiro trabalho encontrado pelo autor para a estimação de parâmetros em transferência de calor pelo filtro de Kalman foi o escrito por TUAN *et al.*, (1996). Os autores estimaram dois fluxos de calor desconhecidos e que variam com o tempo para um problema de transferência de calor transiente bidimensional. Os outros dois contornos foram considerados isolados. Foram testados três formas para o fluxo de calor: triangular, quadrada e senoidal. Os resultados apresentados mostram que o filtro de Kalman foi capaz de estimar o termo fonte para todos os casos estudados.

JI e JANG (1998) avaliam a aplicação do filtro de Kalman com dados experimentais. O experimento foi feito em uma placa de cobre com uma resistência acoplada. A temperatura foi medida com termopares, e o fluxo de calor determinado por

um medidor de fluxo de calor. O fluxo de calor estimado pelo filtro de Kalman foi então comparado com o fluxo de calor medido. Os resultados apresentados pelos autores mostraram boa concordância entre os valores estimados com o filtro de Kalman e os valores medidos.

WELCH e BISHOP (2001) apresentaram em seu livro texto todo o equacionamento do filtro de Kalman, apresentando desde conceitos básicos de estatística, ao filtro de Kalman estendido, que é a versão do filtro de Kalman para problemas não lineares.

GREWAL e ANDREWS (2001) apresentam o filtro de Kalman com aplicações usando a plataforma MATLAB, e a importância do seu desenvolvimento para alguns dos feitos humanos mais marcantes da época, em especial a conquista espacial. O filtro de Kalman estendido também é apresentado neste livro.

RISTIC *et al.* (2004) apresentam em seu livro texto filtros usados para aplicações em rastreamento de alvos. São apresentadas ferramentas para a estimação sequencial pelo método de Monte Carlo, mais conhecidos como filtros de partículas, apresentando uma introdução ao filtro de Kalman.

ORLANDE *et al.* (2008) demonstraram a aplicação de filtros Bayesianos para a estimação de campos transientes de temperatura lineares e não lineares. Para problemas lineares, o filtro de Kalman foi usado, e para problemas não lineares, os autores utilizaram o filtro de partículas. Em ambos os casos, a temperatura estimada com o filtro de Kalman e o filtro de partículas foi mais próxima da temperatura exata do que a temperatura medida. Foi demonstrada a capacidade do método de associar medidas contendo ruídos com informação a respeito da evolução dos estados a fim de obter um resultado levando em conta todas as informações disponíveis.

ORLANDE *et al.* (2011a) apresentaram a descrição de problemas de estimação de estado dentro de uma abordagem Bayesiana. Foram aplicados dois tipos de filtros Bayesianos, o filtro de Kalman para problemas inversos lineares, e o filtro de Partículas para o problema inverso não linear. Os autores estimaram o campo de temperatura transiente usando medidas simuladas. No artigo foi apresentado também um exemplo didático de aplicação de ambos os métodos com dois casos teste: a determinação do campo de temperaturas para um problema com um fluxo de calor constante e o

problema da estimação do campo de temperatura e adicionalmente a estimação da forma de um termo fonte que varia no tempo, para o caso de uma rampa e de um degrau.

ORLANDE *et al.* (no prelo) apresentaram um trabalho na mesma linha de ORLANDE *et al.* (2011a), com diversos exemplos de aplicações dos filtros de Kalman e de Partículas. Os exemplos apresentados foram a estimação de um termo fonte transiente (também apresentado em MASSARD *et al.* no prelo), a estimação do campo de temperatura em oleodutos, a estimação de uma fonte linear de calor e a frente de solidificação em um problema de mudança de fase e por fim a estimação de um fluxo de calor em uma fronteira em um problema de convecção natural.

2.4 Problemas Inversos utilizando filtros de partículas

ORLANDE *et al.* (2008) apresentam uma aplicação dos filtros bayesianos a problemas de condução de calor. Os autores aplicaram o filtro de Kalman e o filtro de partícula baseado no SIR em problemas de condução de calor lineares e não lineares, onde esses métodos Bayesianos foram usados para predizer a temperatura do meio. Os autores descreveram todos os dois problemas de estimação do estado, tanto para o problema linear, quanto para o problema não linear. Mostraram também que o filtro de partículas apresentou um custo computacional maior que o filtro de Kalman.

VIANNA *et al.* (2009) apresentaram um trabalho de aplicação do filtro de Kalman e do filtro de partículas em um problema de transferência de calor, onde os autores estimaram todo o campo de temperatura de um líquido em um oleoduto, na qual as informações fornecidas pelo sistema de monitoramento, em relação ao campo de temperatura são limitadas. Os autores comparam os resultados entre os dois filtros Bayesianos. Posteriormente VIANNA *et al.* (2010) apresentaram um trabalho de aplicação do filtro de partículas em um sistema Pipe-in-Pipe durante uma parada de produção, onde foi estimado todo o campo de temperaturas de um fluido produzido, a fim de evitar a formação de hidratos.

Em 2010 SILVA *et al.* apresentaram aplicação de cinco diferentes filtros de partículas em um problema de condução de calor, onde o objetivo era estimar o fluxo de calor na parte inicial da placa, a recuperação do campo de temperatura e também avaliar qual o melhor filtro entre os testados.

ORLANDE et al (2011) apresentaram um trabalho das aplicações do filtro de Kalman e filtro de partículas em transferência de calor. Nesse mesmo ano SILVA et al (2011) apresentou a aplicação dos filtros SIR e ASIR em um problema de solidificação, onde os autores mostraram a melhor eficiência do filtro ASIR para a tarefa de estimar a fronteira de solidificação que variava com o tempo e o fluxo de calor. Também neste ano, COLAÇO et al (2011) compararam o desempenho do filtro SIR e ASIR para um problema de convecção natural.

No ano de 2012, SILVA et al (2012) aplicaram os filtros SIR e ASIR em um problema de propagação de incêndio, onde utilizaram um modelo simplificado, em que toda a física da propagação da chama esta contida dentro da formulação da velocidade da chama. O objetivo do trabalho foi de estimar a velocidade de propagação do fogo. Neste mesmo ano, ORLANDE et al. (2012) apresentaram um trabalho de problemas de estimativa de estado em transferência de calor, onde os autores apresentaram a parte teórica do problema de estimativa de estado e aplicações.

HAMILTON et al (2012) aplicaram os filtros SIR para a estimativa do coeficiente de transferência de calor durante a condensação, combustão e a expansão da fases do motor do ciclo de Otto.

Desta forma a principais contribuições deste trabalho foi à utilização do problema de estimação de estado combinado com os filtros de partículas na solução de problemas inversos para a estimação de parâmetros e funções. Desta forma, conseguiram-se resultados bem promissores para o problema de propagação de incêndio considerado complexo.

3 MÉTODOS DE MONTE CARLO SEQUENCIAL

Os Métodos Monte Carlo Sequencial (Sequential Monte Carlo Methods - SMC) são um conjunto de métodos de simulação que fornecem uma aproximação computacional atrativa para a distribuição a posteriori. Estes métodos são muito flexíveis, fáceis de implementar e aplicáveis em diversas áreas (ARULAMPALAM, 2002). Porém, só nos últimos anos, com o aumento do poder computacional disponível, tornou-se possível o avanço destes métodos, principalmente para a utilização da integração numérica.

Os métodos SMC são capazes de prever uma variável desconhecida a partir de um conjunto de dados. Geralmente nestes casos é necessário que estes dados ou observações sejam geradas em tempo real e também é desejável que a estimação seja feita em tempo real.

Contudo, antes de entrar nos métodos SMC é necessário introduzir os seguintes tópicos: Inferência Bayesiana, Integração de Monte Carlo, método de simulação - A Amostragem por Importância e problemas de Estimação de Estado.

3.1 Inferência Bayesiana

A inferência Bayesiana não faz distinção entre variáveis aleatórias e os parâmetros de um modelo, no sentido de que todos são considerados aleatórios. Seja \mathbf{z} o vetor de observação e \mathbf{x} o vetor de parâmetros. Partindo de uma distribuição a priori $\pi(\mathbf{x})$, a qual representa o grau de conhecimento ou a crença acerca do vetor de parâmetros, $\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ é a distribuição de probabilidade dos dados dado o valor do vetor \mathbf{x} ($\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ é chamada de função de verossimilhança do modelo). Uma vez que os dados \mathbf{z} contêm informação acerca de \mathbf{x} , pode-se usar \mathbf{z} para atualizar a informação de \mathbf{x} determinando-se a distribuição condicional de \mathbf{x} dado \mathbf{z} . Usando o teorema de Bayes, esta distribuição é dada por:

$$\pi_{posteriori}(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = \frac{\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\int \pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})d\mathbf{x}} \quad (3.1)$$

Porém na maioria das aplicações, a integral do denominador na equação (3.1) não possui forma analítica fechada e sua avaliação usando métodos numéricos em dimensões maiores que 20 torna-se impraticável (ABANTO-VALLE, 2005). Para aproximar a distribuição a posteriori (3.1), usa-se, frequentemente, métodos determinísticos e estocásticos, dentre os quais temos a integração pelo método de Monte Carlo. Estes métodos em geral usam o fato que o denominador na equação (3.1) não depende de \mathbf{x} , o qual leva a.

$$\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z}) \propto \pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}) \quad (3.2)$$

3.2 Integração de Monte Carlo

O método de integração de Monte Carlo é utilizado para aproximar as integrais estatísticas que são difíceis ou impossíveis de serem calculadas analiticamente. Suponha que o interesse esteja na esperança da distribuição a posteriori de uma função $f(\mathbf{x})$, isto é:

$$E[f(\mathbf{x})|\mathbf{z}] = \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})d\mathbf{x} \quad (3.3)$$

Esta integral pode ser aproximada gerando amostras $\mathbf{x}^{(i)}, i=1, \dots, L$ da distribuição $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ e calculando a média da distribuição a posteriori, conforme segue:

$$\bar{f}_M = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L f(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (3.4)$$

Onde \bar{f}_M converge quase certamente para $E[f(\mathbf{x})|\mathbf{z}]$ pela Lei Forte dos Grandes Números (BREIMAN, 1992).

3.3 Método de Simulação – Amostragem por Importância

O cálculo das estimativas (3.3), que geralmente são complicados para problemas não-lineares e não gaussianos, desperta um grande desafio para os pesquisadores. A fim de superar este problema, MARSHALL, (1956) apresentou uma abordagem baseada na *amostragem por importância* (Importance Sampling - IS). Onde a idéia do método é utilizar uma densidade de importância conhecida $q(\mathbf{x}|\mathbf{z})$, a qual é relacionada com a distribuição $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ através do peso de importância dado por $w(\mathbf{x}) = \frac{\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})}{q(\mathbf{x}|\mathbf{z})}$. Daí, tem-se que:

$$E[f(\mathbf{x})|\mathbf{z}] = \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \frac{\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z})}{q(\mathbf{x}|\mathbf{z})} q(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}|\mathbf{z}) d\mathbf{x} \quad (3.2)$$

A aproximação é calculada por :

$$E[f(\mathbf{x})|\mathbf{z}] \approx \frac{1}{N} \sum_i f(\mathbf{x}^{(i)}) w(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (3.6)$$

Onde: $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{z}) > 0$ e $q(\mathbf{x}|\mathbf{z}) > 0$ (KLOEK e VAN DIJK, 1978).

O processo de amostragem por importância estima numericamente o valor esperado do método de Monte Carlo, trocando valores médios, mais complicados, por médias aritméticas simples. Este tipo de procedimento proporciona uma significativa redução do custo computacional em simulação. Porém, o método IS só funciona bem quando $q(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ é uma boa aproximação para a função objetivo, isto é quando as ponderações dos pesos de importância são próximos de 1.

3.4 Problema de Estimação de Estado

Uma das principais questões em problemas de estimação de estado é a modelagem a ser utilizada para representar tanto a observação/medida quanto a evolução dos estados. Particularmente, esta modelagem é representada em espaço de estados de sistemas dinâmicos, no qual o modelo de evolução de estados junto com o modelo de observação constitui esta representação.

Os Modelos Dinâmicos ou Modelos de Espaço de Estado são formulados para permitir alterações nas variáveis de estado que serão estimadas com o passar do tempo. Os problemas de predição de estado são utilizados para representar tanto as observações (medidas) quanto as evoluções das variáveis de estado.

O problema de estimação de estado em geral denota que as informações disponíveis são conhecidas pela variável \mathbf{z} . Supondo um vetor desconhecido \mathbf{x} como uma variável aleatória, e com o objetivo de calcular uma estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ para \mathbf{x} baseada nas medidas \mathbf{z} , na qual o critério $\chi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ seja minimizado, o critério normalmente utilizado é $\chi(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2$, onde $\|\bullet\|_2$ indica a norma L_2 no espaço Euclidiano de \mathbf{x} .

O estimador pode ser pensado como um mapeamento de $\hat{\mathbf{x}}: \mathbf{z} \rightarrow \hat{\mathbf{x}}$. Na qual a idéia é obter o melhor desempenho médio sobre a distribuição de \mathbf{x} . Esta analogia lembra o problema de estimativa do mínimo erro médio quadrático $\mathbf{E}\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2$ cuja solução é conhecida como o valor esperado condicional de \mathbf{x} dado \mathbf{z} , ou seja, $\mathbf{E}[\mathbf{x}|\mathbf{z}]$.

O problema de estimação de estado pode ser visto como uma versão especial do caso mais geral do problema de estimativa do erro médio quadrático (VIANNA, 2010), no qual a distribuição a priori para a variável de estado desconhecida \mathbf{x}_k no tempo t_k é dada por um modelo de evolução no tempo.

Para analisar ou fazer inferência sobre sistemas dinâmicos ou de evolução de estado, faz-se uso de dois modelos: um destes modelos descreve a evolução do sistema da variável do estado no decorrer do tempo e o outro é relacionado com as medidas. Considere o modelo de evolução da variável de estado, dado pelo vetor \mathbf{x} de acordo com a equação (3.7).

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\mu}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \quad (3.7)$$

onde o subscrito k representa o instante do tempo t_k , que varia de um tempo inicial até um tempo final no sistema dinâmico. O vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ é chamado de vetor de estado, que contém as variáveis que serão estimadas. Este vetor avança de acordo com a evolução do estado dado pela equação (3.7), onde \mathbf{f} é considerada nos casos mais gerais uma função não linear das variáveis de estado, da variável de entrada $\boldsymbol{\mu}$ e do vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$, que representa o ruído do estado na forma de uma distribuição independente e identicamente distribuído (*iid*).

Considere agora o modelo das observações dado pela equação (3.8).

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_k) \quad (3.3)$$

Onde as medidas são dadas por $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_z}$ avaliadas no tempo. As medidas são relacionadas com a variável de estado \mathbf{x} através da função \mathbf{h} que pode ser não linear. Também têm-se os ruídos dos dados observados, que são representados pelo vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n_n}$.

O problema de estimativa de estado tem como objetivo obter as informações sobre o vetor \mathbf{x}_k baseado nos modelos de evolução e de observação (medidas) dados pelas equações (3.7) e (3.8) utilizados as seguintes suposições:

- (i) A sequência \mathbf{x}_k $k = 1, 2, \dots$, é um processo Markoviano de primeira ordem, isto é, nas equações abaixo.

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (3.9.a)$$

- (ii) A sequência \mathbf{z}_k $k = 1, 2, \dots$, é um processo Markoviano com respeito à história de \mathbf{x}_k , isto é,

$$\pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \quad (3.9.b)$$

- (iii) A sequência \mathbf{x}_k depende somente da sua observação passada, através da sua própria história, isto é

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{z}_{1:k-1}) = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \quad (3.9.c)$$

A equação (3.9.a) significa que toda a historia das variáveis de estado é resumido só pelo estado anterior. Já a equação (3.9.b) mostra o modelo probabilístico das medidas só depende do estado atual. Além disso, dado os estados para todos os tempos, as medidas são condicionalmente independentes. Por fim, a equação (3.9.c) mesmo tempo uma formulação diferente representa a mesma justificativa da equação (3.9.a).

Além disso, para a evolução do modelo de observação dado pelas equações (3.7 e 3.8) presume-se que os vetores de ruído \mathbf{v}_i e \mathbf{v}_j , assim como \mathbf{n}_i e \mathbf{n}_j , são mutuamente independentes entre si, para $i \neq j$. Os vetores \mathbf{v}_i e \mathbf{n}_j são também independentes para todo i e j (KAPIO e SOMERSALO, 2004).

Diferentes problemas podem ser considerados como os modelos de observação e evolução, a saber, (KAPIO e SOMERSALO, 2004).

- (i) O problema de previsão de estado cujo objetivo é estimar $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_w)$, onde $k > w$;
- (ii) O problema de filtro de estado cujo objetivo é estimar $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k})$;
- (iii) O problema de suavização com retardo fixo (*fixed-lag domain smoothing problem*) de estado cujo objetivo é estimar $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:k+p})$, onde $p \geq 1$ é o retardo fixo;
- (iv) O problema de suavização de domínio inteiro (*whole-domain smoothing problem*) de estado cujo objetivo é estimar $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_{1:K})$, onde $\{\mathbf{z}_K, K = 1, \dots, t\}$ é toda sequência de medidas.

Segundo Anderson & Moore (1979) o problema de previsão tem seu objetivo principal em obter a partir de dados num tempo “k” a informação de dados em um tempo “k + λ ”, onde λ é um **número** inteiro maior que 1. O problema de filtro tem seu objetivo principal em obter a partir de dados num tempo “k” a informação de dados em um tempo “k+1”, é o problema online. Por fim, a suavização a informação de um dado num certo período de tempo “k” não é disponível, com isso utilizam-se medidas obtidas em tempos posteriores ao “k” (como exemplo “k + λ ”) para obter a informação no tempo desejado.

Nesse trabalho foi resolvido somente o problema de filtro, já que o objetivo é ter resposta online. Então suponha que $\pi(\mathbf{x}_0|\mathbf{z}_0) = \pi(\mathbf{x}_0)$ é conhecida, a distribuição a posteriori $\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{z}_{1:k})$, é o objetivo do problema de filtro. Esta distribuição pode ser obtida por meio dos filtros Bayesianos através de duas etapas (KAPIO e SOMERSALO, 2004): previsão e atualização como mostra a figura 3.1 que ilustra o processo.

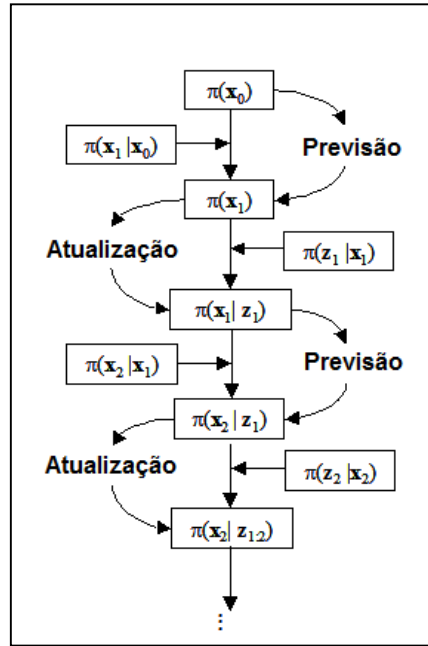


Figura 3.1: Passos da Predição e atualização para filtros Bayesianos (KAPIO e SOMERSALO, 2004).

3.5 Filtro de Partículas

Os problemas de estimativa de estados apresentados na seção anterior podem ser resolvidos de várias formas. Nesta tese serão utilizados os filtros Bayesianos da classe de filtros de partículas ou Sequencial Monte Carlo (SMC). Os filtros de partículas utilizam uma distribuição inicial para o estado \mathbf{x}_0 e procuram calcular a melhor estimativa $\hat{\mathbf{x}}$ para o estado atual \mathbf{x}_k , baseado na sequência de medidas \mathbf{z}_k . Existem inúmeras variações dos filtros de partículas, como (RISTIC *et al*, 2004): o filtro de amostragem por importância sequencial, o filtro amostragem por importância e

reamostragem sequencial, o filtro auxiliar de partícula ou amostragem e reamostragem por importância auxiliar, etc. A tabela 3.1 apresenta os filtros de partículas estudados, suas diferenças dos algoritmos e a etapa de compreensão e implementação. Nota-se que as diferenças se encontram no cálculo dos pesos, porém todos utilizam a função de verossimilhança em sua formulação e na seleção das partículas. A figura 3.2 apresenta o esboço do problema de estimativa de estado com filtros de partículas em problemas inversos.

Tabela 3.1: Filtros de Partículas: Diferentes Algoritmos

Filtros de Partículas	<i>Cálculo</i> dos pesos	Seleção das partículas	Fase de compreensão
SIS	$\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_k^i) = \mathbf{w}_{k-1}(x_{k-1})\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i)$	Não existe	Completo
SIR	$\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_k^i) = \pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i)$	Reamostragem	Completo
ASIR	$\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_k^i) = \frac{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i)}{\pi(\mathbf{z}_{k-1} \mathbf{u}_k^{i(j)})}$	Filtro SIR+ Variável Auxiliar	Completo
Filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial	$\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_k^i) = \pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i) \quad , k=1$ $\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_k^i) = \mathbf{w}_{k-1}(x_{k-1}) \frac{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i)}{\pi(\mathbf{z}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^i)}$ $k > 1$	MCMC + Metropolis Hasting	Incompleto
Monte Carlo Sequencial sem o cálculo da função de verossimilhança	$\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_k^i) = \pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i) \quad , k=1$ $\mathbf{w}_k(\mathbf{x}_k^i) = \mathbf{w}_{k-1}(x_{k-1}) \frac{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i)}{\pi(\mathbf{z}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^i)}$ $k > 1$	Cálculo da Distância Euclidiana	Incompleto

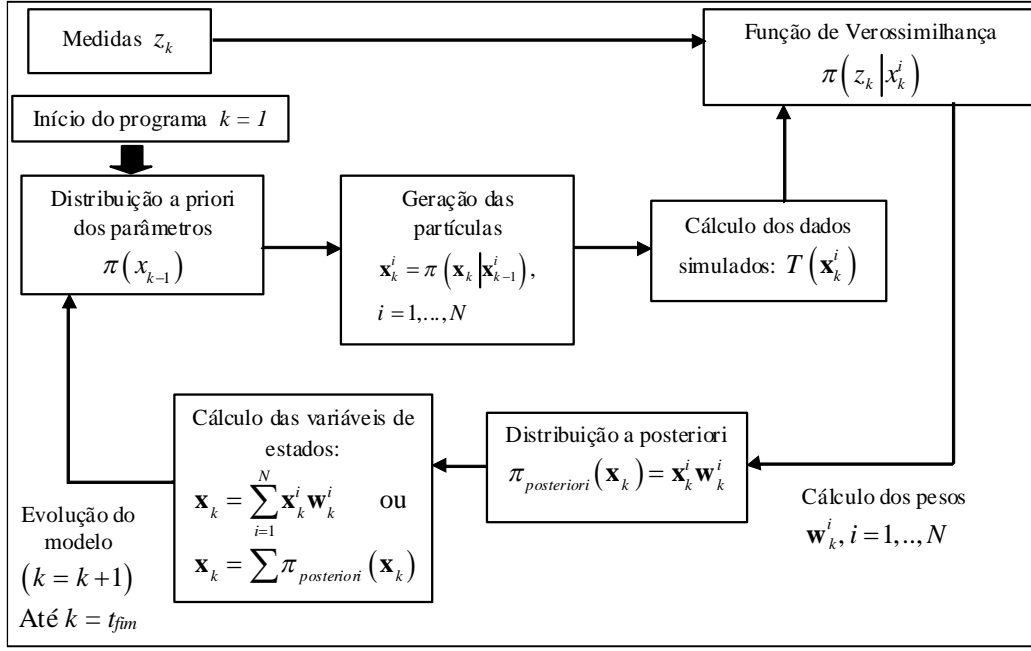


Figura 3.2: Esquema dos filtros de partículas para problemas inversos.

3.5.1 O filtro amostragem por importância sequencial (SIS)

Os filtros de partículas são baseados no método Amostragem por Importância Sequencial (SIS - Sequential Importance Sampling (HAMMERSLEY e HANSCOMB, 1964)), na qual a idéia chave é representar a função densidade posteriori por um conjunto de amostras randômicas (as partículas), associadas aos seus respectivos pesos. Supondo que $\{x_k^i, w_k^i\}_{i=1}^N$ seja uma medida randômica que representa $\pi(x_k | z_k)$, onde $\{x_k^i, i = 1, \dots, N\}$ são as partículas com pesos $\{w_k^i, i = 1, \dots, N\}$ (RISTIC *et al*, 2004), em que N é o número de partículas e $\{x_{0:k}, k = 1, \dots, t_f\}$ é o conjunto de estados até ao instante final, ou seja, t_f , em seguida, os pesos são normalizados fazendo $\sum_i w_k^i = 1$, onde a distribuição a posteriori no instante k pode ser aproximada por:

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i) \quad (3.10)$$

Como visto anteriormente, tem-se a aproximação dos pesos da distribuição a posteriori dada por $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k)$, em que os pesos são calculados usando o princípio da amostragem por importância. Supõe-se que as partículas \mathbf{x}_k^i foram obtidas de uma *densidade de importância* $q(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k)$ em que os pesos foram definidos por.

$$w_k^i = \frac{\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k)}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k)} \quad (3.11)$$

Utilizando o teorema de Bayes, junto com a simulação recursiva, DOUCET *et al*, (2001), apresentaram a atualização dos pesos:

$$w_k^i = w_{k-1}^i \frac{\pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i) \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)} \quad (3.12)$$

Este algoritmo foi à idéia original do método SIS (HAMMERSLEY e HANSCOMB, 1964). Porém, tal método apresentou o problema de degeneração das partículas, que significa um aumento gradual da variância dos pesos, ou seja, após algumas iterações, apenas uma das partículas tem um peso não desprezível (DOUCET, 2008). Uma estratégia para limitar a degeneração das partículas está na escolha da distribuição por importância, pois é ela que determina a eficiência e a complexidade do filtro de partículas e minimiza a variância dos pesos por importância. A distribuição por importância igual à $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k)$ é dada como a escolha ótima. Porém, o cálculo dos pesos seria muito complicado e em alguns casos sujeitos a condições mais restritivas (ARULAMPALAM *et al*, 2002 e DOUCET *et al*, 2000).

A escolha mais conveniente e a mais utilizada consiste em utilizar a densidade de importância sendo a distribuição a priori, ou seja:

$$q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{z}_k) = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) \quad (3.13)$$

CHEN e LIU (1996), KONG *et al* (1994) utilizou esta idéia para obter a seguinte fórmula para os pesos de importância, dada pela equação (3.14). Isto é os pesos são apenas atualizados pela função de verossimilhança.

$$\mathbf{w}_k^i = \mathbf{w}_{k-1}^i \pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i) \quad (3.14)$$

3.5.2 *O filtro amostragem por importância e reamostragem sequencial (SIR)*

O filtro amostragem por importância e reamostragem sequencial (Sequential Importance Resampling - SIR) (GORDON *et al*, 1993) é derivado do algoritmo SIS, no qual foi criada uma etapa adicional para evitar o problema de degeneração das partículas. Este fenômeno ocorre quando toda a amostra, exceto uma partícula, tem um peso muito pequeno após algumas evoluções do algoritmo do filtro de partícula padrão.

A degeneração faz com que um grande esforço computacional seja feito para atualizar amostras que contribuem muito pouco para a aproximação de $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k)$. Uma medida de degeneração do algoritmo do filtro de partícula, dada pelo tamanho amostral efetivo N_{eff} foi introduzida por BERGMAN (1999) e LIU e CHEN (1998), o qual é definido pela equação (3.15). Valores de N_{eff} pequenos significam uma severa degeneração. Como o fenômeno da degeneração é indesejável, tem-se como objetivo tentar reduzi-lo. Um modo de tentar reduzir este efeito é escolher um valor elevado para o número de partículas, o que é em muitos casos impraticável. Por isso, o modo mais comum de reduzir este efeito é a utilização da reamostragem.

A figura 3.3 apresenta o processo de seleção das partículas através da reamostragem, onde: (1) são as partículas com peso uniforme no momento $t = t_n$; (2) são os pesos das

partículas atualizados após as medições; (3) Re-Amostragem: Embora a quantidade total de partículas seja a mesma, aquelas com menor peso são descartadas e aquelas com maior peso dão origem a novas partículas próximas às regiões de maior probabilidade e (4) são as partículas com pesos uniformes no momento t_{n+1} .

Este procedimento foi inicialmente proposto por GORDON *et al* (1993), denominado filtro de partículas *bootstrap* (FPB). Ao amostrar proporcionalmente a verossimilhança, o filtro de partículas (FP) focaliza nas regiões da distribuição onde a verossimilhança é maior, ou seja, onde as boas aproximações significam maior importância.

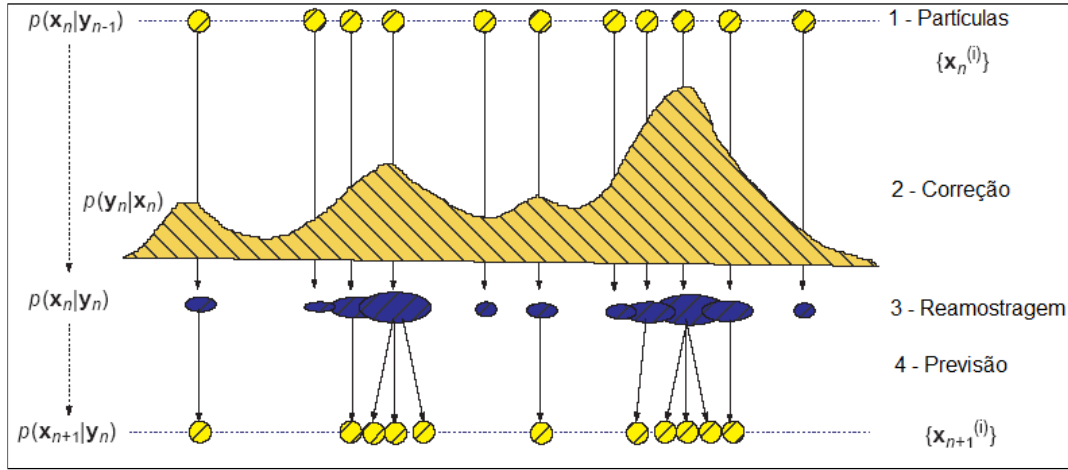


Figura 3.3: Reamostragem (ZHE, 2002).

Como dito anteriormente, a idéia da reamostragem é eliminar as partículas com pequenos pesos normalizados. Desta forma, ocorre uma seleção pelas partículas de maior peso ou de maior importância. Uma medida da degeneração do algoritmo é o tamanho efetivo da amostra (N_{eff}) (KONG *et al*, 2000).

$$N_{eff} = \frac{N}{1 + Var(w_t^i)} \quad (3.15)$$

Porém, é impossível avaliar precisamente N_{eff} . Então, utiliza-se uma aproximação \hat{N}_{eff} para o valor de N_{eff} . Esta aproximação é dada por (KONG *et al*, 2000):

$$\hat{N}_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_t(i))^2} \quad (3.16)$$

A reamostragem pode ser realizada quando o tamanho amostral efetivo \hat{N}_{eff} for menor que uma constante N_T , onde essa constante seria um indicador da ocorrência de degeneração. Portanto, a idéia básica da reamostragem é eliminar as amostras que têm um peso muito pequeno, mantendo apenas as amostras que têm um maior peso.

Porém a reamostragem introduz outros problemas no filtro de partícula. O principal problema é que as amostras com pesos maiores serão selecionadas estatisticamente muitas vezes. Isso gera uma perda de diversidade amostral, já que a amostra resultante apresentará muitos pontos repetidos. Esse problema é conhecido como empobrecimento amostral, e é significativo nos processos com baixo nível de ruído no modelo de evolução (ARULAMPALAM, 2002). A tabela 3.2 resume as principais etapas do filtro *SIR* na qual a reamostragem é realizada em todos os passos de tempo.

Tabela 3.2: Algoritmo do filtro de Partícula SIR

1. <u>Inicialização</u>
1.1 Faça $k=1$;
1.2 Gere um conjunto de partículas da distribuição inicial $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^i)$
2. <u>Avaliação dos Pesos</u>
2.1 Calcule os pesos: $w_k^i = \pi(z_k \mathbf{x}_k^i)$
2.2 Normalize os pesos: $\hat{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^N w_k^i}$
3. <u>Reamostragem ou Seleção</u>
3.1 Reamostragem das partículas são dados abaixo:
3.1.1 Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{w}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
3.1.2 Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
3.1.3 Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $\mathbf{x}_k^j = \mathbf{x}_k^i$.
• Designe os pesos para $w_k^j = N^{-1}$.
4. <u>Calculo da Média a posteriori</u>
$\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k(i) \cdot w_k^{(i)}$
5. <u>Evolução do Modelo</u>
5.1 Faça $k = k + 1$. Se $k = k_{final} + 1$, então pare.
5.2 $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^i)$ para $i = 1, \dots, N$.
Retorne para passo 2.

Inicialmente, N partículas são amostradas aleatoriamente do modelo de evolução ou de uma distribuição inicial $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1})$. Em seguida, é feito o cálculo dos pesos de cada partícula gerada, considerando que neste instante k têm-se medidas representadas por \mathbf{z}_k . A seguir, normalize os pesos obtendo $\hat{w}_k^{(i)}$. As partículas de maior peso representam as regiões de maior importância da distribuição. Por isso, elas são selecionadas para ser duplicadas ou multiplicadas, como uma seleção natural e são dados pesos uniformes iguais a $\frac{1}{N}$ para cada partícula selecionada. E por fim, é feito o cálculo da média que representa a variável de estado naquele passo de tempo. Passe para o próximo tempo e repete-se o procedimento, e prossegue-se até o tempo final.

O filtro de partículas SIR tem seu principal problema dado pela exploração do espaço de estado, pois esta é realizada sem o conhecimento das observações e por isso o filtro poderá ser ineficiente. Com a reamostragem sendo feita em cada iteração do algoritmo, pode-se ter uma rápida perda de diversidade amostral (PITT e SHEPHARD (1999)).

3.5.3 *O filtro auxiliar de partícula ou amostragem e reamostragem por importância auxiliar (ASIR)*

O filtro de partículas SIR descrito na secção anterior apresenta uma etapa de reamostragem que tenta evitar a degeneração das partículas. Porém, como visto anteriormente, esse processo pode gerar o empobrecimento da amostra.

ZHE (2002) afirma que a utilização de um número finito de partículas é insuficiente para tentar prever o comportamento da cauda da densidade de probabilidade, o que se torna mais grave quando os *outliers* são inexistentes.

Para tentar resolver este problema, PITT e SHEPHARD (1999), apresentaram o filtro auxiliar de partículas (AFP), onde este método tem como objetivo aumentar o número de “partículas boas” $\{\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}\}$, de acordo com as regiões de maior importância, dadas pela função de verossimilhança $\pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$. Assim, PITT e SHEPHARD (1999) apresentaram uma terminologia chamada de *densidade preditiva empírica*, dado por:

$$\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k) \propto \sum_{i=1}^N \pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \mathbf{w}_{k-1}^{(i)} \quad (3.17)$$

Onde a equação (3.17) pode ser re-parametrizada introduzindo uma variável auxiliar $\boldsymbol{\beta} \in \{1, \dots, N\}$, para adotar uma nova densidade de importância igual a $q(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_k)$ dado o par $\{\mathbf{x}_k^j, \boldsymbol{\beta}^j\}_{j=1}^N$ da amostra, onde $\boldsymbol{\beta}^j$ refere-se ao índice da partícula no tempo $k-1$, ou seja, $\{\boldsymbol{\beta}^j = j\}$. Aplicando-se o teorema de Bayes, pode-se obter o seguinte resultado (ARULAMPALAM *et al*, 2002):

$$\begin{aligned}
\pi(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_k) &\propto \pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \pi(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_{k-1}) \\
&= \pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \pi(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_{k-1}) \pi(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_{k-1}) \\
&= \pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) \mathbf{w}_{k-1}^i
\end{aligned} \tag{3.18}$$

A idéia principal do filtro ASIR é incrementar a influência das partículas que tenham uma grande verossimilhança preditiva. Desta maneira, o algoritmo gera um novo conjunto de partículas simulando conjuntamente a variável auxiliar $\boldsymbol{\beta}$ (seleção) e o valor partícula \mathbf{x}_k da função densidade de importância (ARULAMPALAM *et al*, 2002):

$$q(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_k) \propto \pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{u}_k^i) \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i) \mathbf{w}_{k-1}^i \tag{3.19}$$

Onde \mathbf{u}_k^i é alguma descrição de \mathbf{x}_k dado \mathbf{x}_{k-1}^i . Por exemplo, ser a média, ou seja, $\mathbf{u}_k^i = E[\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i]$, ou uma amostra $\mathbf{u}_k^i \sim \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$. Deste modo, partículas menos informativas são descartadas e a informação contida em cada partícula é avaliada em relação à variável e ao conjunto inicial de partículas. No filtro AFP os pesos são dados pela equação (3.20) (RISTIC *et al*, 2004):

$$w_k^i = \frac{\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k)}{q(\mathbf{x}_k | \mathbf{z}_k)} \propto \frac{\pi(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_k)}{q(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\beta} | \mathbf{z}_k)} \tag{3.20}$$

Adaptando esses pesos para a amostra do par $\{\mathbf{x}_k^j, \boldsymbol{\beta}^j\}_{j=1}^N$, e utilizando as equações (3.18) e (3.19), tem-se a equação para encontrar os pesos para o filtro auxiliar de partícula:

$$w_k^i = \frac{\pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^i)}{\pi(\mathbf{z}_k | \mathbf{u}_k^{\beta^j})} \tag{3.21}$$

A tabela 3.3 resume as principais etapas do filtro ASIR.

Tabela 3.3: Algoritmo do filtro de Partícula ASIR

1. Inicialização
a. Faça $k=1$;
b. Tome um conjunto de partículas da distribuição inicial $\pi(x_0)$ e obtenha $\{(\mathbf{x}_k^{(i)}, \mathbf{w}_k^{(i)}); i = 1, \dots, N\}$;
2. Cálculo da amostra do estado do sistema para a Variável Auxiliar
a. Calcule $\mathbf{u}_k^i = E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^i]$ ou $\mathbf{u}_k^i \sim \pi(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^i)$.
3. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança: $\mathbf{w}_k^i = \mathbf{w}_{k-1}^i \pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u}_k^{(i)})$
b. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^i = \frac{\mathbf{w}_k^i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^i}$
4. Reamostragem ou Seleção
a. Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{\mathbf{w}}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
b. Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
c. Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $\mathbf{u}_k^{\beta^j} = \mathbf{u}_k^i$
5. Calculem os pesos das partículas selecionadas: $\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u}_k^{\beta^j})$
6. Evolução do Modelo
a. Calcule as partículas: $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_{k-1}^{ij})$ para $i = 1, \dots, N$.
7. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança $\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^{(i)})$
b. Calcule os novos pesos: $\mathbf{w}_k^i = \frac{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{x}_k^i)}{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u}_k^{\beta^j})}$
c. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^{(i)} = \frac{\mathbf{w}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^{(i)}}$
8. Calculo da Estimativa do Estado Atual
a. $\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_k^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$
b. Faça $k = k + 1$, se $k = t_{\text{final}} + 1$, então pare.
Com as novas partículas, retorne ao segundo passo.

Nos filtros de partículas tradicionais, a estimativa é normalmente realizada após a etapa de reamostragem, que é menos eficiente, pois apresenta variação aleatória no

estado atual (LIU e CHEN, 1998). O filtro Auxiliar de partículas ou filtro ASIR basicamente resolve este problema, pois esse método gera dois conjuntos de partículas o primeiro conjunto é feito aleatoriamente e seguem o mesmo procedimento que o filtro SIR, porém as partículas que passaram pela reamostragem $\mathbf{u}_k^{i(j)}$ são usadas para gerar o segundo conjunto de partículas. Esse novo conjunto de partículas vem apresenta uma melhor informação a priori, já que ele é gerado na região de alta probabilidade encontrada pelo filtro SIR. ARULAMPALAM, *et al* (2002), afirmaram que o filtro Auxiliar de Partícula apresenta o desempenho melhor que o filtro de Partículas SIR quando o ruído do processo é pequeno. No entanto, quando o ruído de processo é grande, as amostra de \mathbf{u}_k^i não fornecem informações adequadas sobre $\pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)})$. Logo, a superioridade do filtro Auxiliar de Partícula não pode ser garantida. Este fato também é visto nesse trabalho, já que os resultados dos filtros SIR e ASIR são bem próximos.

A idéia do filtro de Partículas ASIR também é idêntica à do método de Monte Carlo proposto por LIU e CHEN (1998), onde os autores propuseram dois métodos para extrair amostras $\{\mathbf{x}_k^i, \boldsymbol{\beta}^{(i)}\}$ baseadas na distribuição marginal. Os filtros de partículas auxiliares são computacionalmente mais lentos, pois a proposta é gerar e calcular as partículas e os pesos por importâncias o dobro de vezes do filtro de partículas SIR. HIGDON (1998) diz que a etapa de reamostragem para o algoritmo do filtro de Partículas ASIR é desnecessária, porém esta afirmação não está suficientemente justificada.

O filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial e o filtro Monte Carlo Sequencial sem o cálculo da função de verossimilhança não são descritos nesse trabalho, pois eles ainda estão sendo estudados, no entanto, eles têm os mesmos procedimentos descritos na figura 3-2 e suas diferenças estão na geração das partículas e no cálculo dos pesos. Mas detalhes desses métodos é visto em, DEL MORAL *et al.* (2006) e SISON e FAN (2002).

4 PROBLEMAS FÍSICOS E FORMULAÇÕES MATEMÁTICAS

4.1 Problema de Condução de Calor

Nesta seção será apresentada a formulação matemática do problema físico inicialmente estudado neste trabalho, que é um problema direto de condução de calor. O objetivo do problema direto é a determinação do campo de temperaturas, sendo conhecidas a distribuição inicial de temperatura, as propriedades termofísicas do material, e as condições de contorno nas superfícies.

O problema físico envolve condução de calor transiente unidimensional em uma placa de tamanho L , em coordenadas Cartesianas, com fluxo de calor $q(t)$ imposto em $x=0$ e troca de calor por convecção $x=L$, conforme ilustrado na figura 4.1.

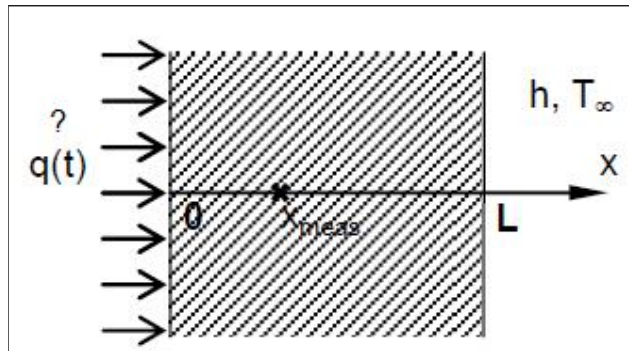


Figura 4.1: Esquema do Problema de condução de calor

A equação que governa a distribuição das temperaturas na placa é dada por:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad \text{em } 0 < x < L \text{ e } t > 0 \quad (4.1)$$

Com condições de contorno abaixo:

$$-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = q(t) \quad \text{em } x = 0 \text{ e } t > 0 \quad (4.2)$$

$$k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + hT(x, t) = h T_{\infty} \quad \text{em } x = L \text{ e } t > 0 \quad (4.3)$$

E condição inicial:

$$T(x, t) = T_{\text{inicial}} \quad \text{em } 0 \leq x \leq L, t = 0 \quad (4.4)$$

4.1.1 Adimensionalização do Problema de condução de calor

Para tratar o problema de forma adimensional, as seguintes variáveis auxiliares foram definidas:

$$\Phi(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T_{\infty}}{\frac{q_0}{k} L} \quad (4.5.a)$$

$$X = \frac{x}{L} \quad (4.5.b)$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (4.5.c)$$

$$Q(\tau) = \frac{q(t)}{q_0} \quad (4.5.d)$$

$$Bi = \frac{hL}{k} \quad (4.5.e)$$

onde q_0 é um fluxo de calor de referência

Assim temos a nova formulação adimensional dada por:

$$\frac{\partial^2 \Phi(X, \tau)}{\partial X^2} = \frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{em } 0 < X < 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (4.6)$$

Sujeita às condições de contorno abaixo:

$$-\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial X} = Q(\tau) \quad \text{em } X = 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial X} + Bi\Phi(X, \tau) = 0 \quad \text{em } X = 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (4.8)$$

Com a condição inicial:

$$\Phi(X, \tau) = \Phi_{inicial} \quad \text{em } 0 < X < 1 \text{ e } \tau = 0 \quad (4.9)$$

O problema direto dado pelas equações (4.6-4.9) foi resolvido pelo método implícito de diferenças finitas.

$$\frac{\partial^2 \Phi(X, \tau)}{\partial X^2} = \frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial \tau} \quad \text{em } 0 < X < 1 \text{ e } \tau > 0, \quad i = 2, \dots, M \quad (4.10)$$

$$-\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial X} = Q(\tau) \quad \text{em } X = 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial X} + Bi\Phi(X, \tau) = 0 \quad \text{em } X = 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (4.12)$$

$$\Phi(X, \tau) = \Phi_{inicial} \quad \text{em } 0 < X < 1 \text{ e } \tau = 0 \quad (4.13)$$

4.1.2 *Problema Inverso usando estimativa de estado e filtros de partículas para o problema de condução*

Na apresentação do Problema Direto descrito anteriormente, o campo de temperatura transiente para a região será determinado, assumindo-se conhecidas as propriedades físicas do meio, as condições de contornos em $X = L$ e $X = 0$ e a condição

inicial. Para esse problema, foi utilizado o método numérico das diferenças finitas, com uma malha de 121 nós, para obter as medidas simuladas.

O problema inverso estudado nesse caso tem como o objetivo estimar o campo de temperatura da placa e o fluxo de calor localizado em $X = 0$, utilizando os seguintes algoritmos: o filtro de partículas SIR e o algoritmo filtro ASIR. Na solução dos problemas inversos, todas as outras quantidades existentes na formulação matemática do problema físico são consideradas conhecidas, porém as medidas de temperaturas foram acrescentadas um ruído de 5% da temperatura máxima obtida. Assim, as temperaturas medidas simuladas foram geradas com um desvio padrão constantes, caracterizando incertezas provenientes do sistema de medidas, como mostra a equação (4.14).

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \gamma \quad (4.14)$$

Onde $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ é a solução do problema direto de condução na posição x_{meas} , que é situada no vigésimo quarto nó da malha com variação do tempo de zero a noventa para o vetor de parâmetros \mathbf{x} , γ é o erro das medidas de temperatura, sendo ainda considerado um erro aditivo normalmente distribuído com média zero e desvio padrão conhecido.

A função de verossimilhança $\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ é dada por (BECK e ARNOLD, 1997, KAIPIO e SOMERSALO, 2004, GAMERMAN, 1996):

$$\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = (2\pi)^{-U/2} |\mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1}|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z} - \mathbf{T}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{T}(\mathbf{x})) \right] \quad (4.15)$$

Em que, \mathbf{W} é a inversa da matriz de covariâncias das medidas. De acordo com OZISIK e ORLANDE (2000) $\mathbf{W}_{\text{cov}} = \sigma_0 \mathbf{I}_{n \times n}$, onde σ_0 é a incerteza das medidas e como normalmente as medidas são fabricadas, ou seja, são medidas simuladas. Foi preferível utilizar a sugestão de OZISIK e ORLANDE (2000), tomando $\sigma_0 = 1\%$ do valor **máximo** das medidas e $\mathbf{I}_{n \times n}$ é a matriz identidade do tamanho do vetor das medidas.

Para a estimação dos dois tipos de fluxos de calor, com os filtros de partículas SIR e ASIR, foi usado o método numérico das diferenças finitas para o modelo de evolução de estado. Porém, foi usada uma malha de 21 nós, a fim de evitar o crime inverso.

No problema de condução de calor as variáveis de estados foram o fluxo de calor e o campo de temperatura. A equação (4.16) apresenta o modelo de evolução para o fluxo de calor $Q_k = f(Q_{k-1}, u_{q_{k-1}}, v_{q_{k-1}})$ e a equação (4.17) exibe o modelo de evolução para o campo de temperatura $\Phi_k = f(\Phi_{k-1}, u_{\Phi_{k-1}}, v_{\Phi_{k-1}})$.

$$Q_k = Q_{k-1} + \sigma_Q W + Q \quad (4.16)$$

$$A_{i-1} \Phi_{i-1}^k + A_i \Phi_i^k + A_{i+1} \Phi_{i+1}^k = B_i \Phi_i^{k-1} + C + \sigma_\Phi W_\Phi \quad (4.17)$$

O conjunto de partículas $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ apresentado no algoritmo dos filtros de partículas mostrados nas tabelas (3.2) e (3.3) foram gerados pelas equações (4.16) e (4.17). Para o fluxo de calor foi utilizado o passeio aleatório, onde W_Q são números randômicos dados por uma distribuição normal com média zero e desvio unitário. A fim de descobrir a melhor opção para cada tipo de fluxo de calor examinada, foram testados três diferentes valores para σ_Q , em que o menor valor representa uma pequena incerteza e os outros dois uma incerteza mais elevada.

O modelo de evolução do campo de temperatura foi dado pela equação (4.17), onde A_i, B_i e C_i são valores encontrados pela discretização das diferenças finitas (descrita no apêndice B) em todo o domínio (i representa cada ponto da malha) e para cada tempo, W_Φ são números randômicos dados por uma distribuição normal com média zero e desvio unitário; σ_Φ é o desvio padrão do modelo que foi utilizado o valor de 1% da temperatura máxima, ou seja, $\sigma_\Phi = 0.01$, esse valor foi escolhido de forma arbitrária. Todos os modelos de evolução utilizados apresentavam incertezas aditivas e gaussianas.

As tabelas 4.1 e 4.2 mostram a adaptação feita para a estimação do filtro SIR e do filtro ASIR para a estimação do fluxo de calor.

Tabela 4.1: Algoritmo do filtro SIR para o problema de condução de calor

1. <u>Inicialização</u>
1.1 Faça $k=1$;
1.2 Gere um conjunto de partículas pelo modelo de evolução $Q_k^i = Q(k-1) + \sigma_Q W_Q$
2. <u>Avaliação dos Pesos</u>
2.2 Calcule os pesos: $w_k^i = \pi(\mathbf{z}_k \mathbf{Q}_k^i) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(Q_k^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(Q_k^i)) \right]$
2.2 Normalizem os pesos: $\hat{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^N w_k^i}$
3. <u>Reamostragem ou Seleção</u>
3.1 Reamostragem das partículas são dados abaixo:
3.1.1 Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{w}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
3.1.2 Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
3.1.3 Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $Q_k^j = Q_k^i$.
• Designe os pesos para $w_k^j = N^{-1}$.
4. <u>Cálculo da Média da posteriori</u> $Q(k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_k(i) \cdot \mathbf{w}_k^{(i)}$
5. <u>Evolução do Modelo</u>
• Faça $k = k + 1$. Se $k = k_{\text{final}} + 1$, então pare.
• $Q_k^i = Q(k-1) + \sigma_Q W_Q$ para $i = 1, \dots, N$.
Retorne para passo 2.

Tabela 4.2: Algoritmo do filtro ASIR para o problema de condução de calor

1. Inicialização
a. Faça $k=1$;
b. $\mathbf{w}_{k-1}^{(i)} = 1/N$
2. Cálculo da amostra do estado do sistema para a Variável Auxiliar
a. Calcule $\mathbf{u}_k^i = \mathbf{Q}_k^i = \mathbf{Q}(k-1) + \sigma_{\mathbf{Q}} W_Q$
3. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança:
$\mathbf{w}_k^i = \mathbf{w}_{k-1}^i (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^i)) \right]$
b. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^i = \frac{\mathbf{w}_k^i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^i}$
4. Reamostragem ou Seleção
d. Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{\mathbf{w}}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
e. Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
f. Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $\mathbf{u}_k^{\beta^j} = \mathbf{u}_k^i$
5. Calcule a função de verossimilhança de:
$\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u}_k^{\beta^j}) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^{\beta^j}))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^{\beta^j})) \right]$
6. Evolução do Modelo
a. Calcule as partículas: $\mathbf{Q}_k^i = \mathbf{u}_k^{\beta^j} + \sigma_{\mathbf{Q}} W_Q$ para $i = 1, \dots, N$.
7. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança
$\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{Q}_k^{(i)}) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{Q}_k^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{Q}_k^i)) \right]$
b. Calcule os novos pesos: $\mathbf{w}_k^i = \frac{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{Q}_k^i)}{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u}_k^{\beta^j})}$
c. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^{(i)} = \frac{\mathbf{w}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^{(i)}}$
8. Cálculo da Estimativa do Estado Atual
• $\mathbf{Q}(k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_k(i) \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$
• Faça $k = k + 1$, se $k = t_{\text{final}} + 1$, então pare.
Com as novas partículas, retorne ao segundo passo.

Nesse trabalho todos os problemas que utilizaram medidas simuladas, foram fabricados de acordo com a equação (4.14) e tiveram o cálculo das incertezas das medidas dadas de acordo com a sugestão de OZISIK e ORLANDE (2000).

4.2 Problema de Solidificação

Nesta seção será apresentada a formulação matemática do problema de solidificação. A formulação matemática apresentada aqui considera conhecidas a distribuição inicial de temperatura, as propriedades termofísicas da água no estado líquido e sólido, e as condições de contorno, que constitui um problema direto de solidificação. O objetivo do problema direto é a determinação do campo de temperatura para um problema de solidificação, unidimensional em um meio semi-infinito, transiente e em coordenadas cilíndricas, no qual têm-se um sorvedouro de calor Q W/m (*line heat sink*) no eixo do cilindro, como mostra a figura 4.2.

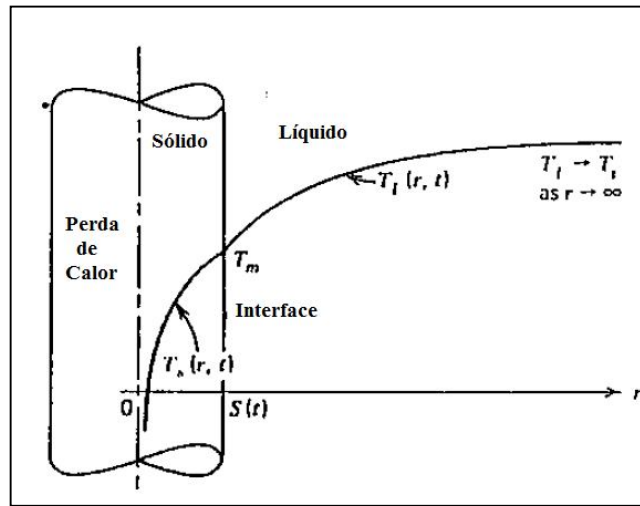


Figura 4.2: Esquema do Problema Não Linear (ÖZISIK, 1980)

A formulação matemática para a fase sólida do problema é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s(r, t)}{\partial t} \quad 0 < r < S(t) \text{ e } t > 0 \quad (4.18)$$

Enquanto a formulação matemática para a fase líquida do problema é dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha_l} \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial t} \quad \text{em } 0 < r < S(t) \text{ e } t > 0 \quad (4.19.a)$$

$$T_l(r, t) \rightarrow T_i \quad \text{em } r \rightarrow \infty \text{ e } t > 0 \quad (4.19.b)$$

$$T_l(r, t) = T_i \quad \text{em } t = 0 \text{ e } r > 0 \quad (4.19.c)$$

Na interface de líquido e sólido, tem-se:

$$T_s(r, t) = T_l(r, t) = T_m \quad \text{em } r = S(t) \text{ e } t > 0 \quad (4.19.d)$$

$$k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} - k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} = \rho L \frac{dS(t)}{dt} \quad \text{em } r = S(t) \text{ e } t > 0 \quad (4.19.e)$$

Onde T_m é a temperatura de solidificação do fluido, T_i é a temperatura inicial do fluido, k_s é a condutividade térmica do fluido na fase sólida, k_l é a condutividade térmica do fluido na fase líquida, ρ é massa específica do fluido, L é o calor latente do fluido, T_s é a temperatura na fase sólida e T_l é a temperatura na fase líquida, α_l é a difusividade do fluido na fase líquida e α_s é a difusividade térmica na fase sólida.

As soluções para as fases sólida e líquida, retirada de (ÖZISIK, 1980), são dadas respectivamente por:

$$T_s(r, t) = A - BE_i \left(\frac{-r^2}{4\alpha_s t} \right) \quad 0 < r < S(t) \quad (4.12.a)$$

$$T_l(r, t) = T_i - CE_i \left(\frac{-r^2}{4\alpha_l t} \right) \quad S(t) < r < \infty \quad (4.12.b)$$

Derivando as soluções em relação ao raio tem-se:

$$\frac{\partial T_s}{\partial r} = -\frac{2B}{r} e^{\frac{-r^2}{4\alpha_s t}} \quad (4.20.c)$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial r} = -\frac{2C}{r} e^{\frac{-r^2}{4\alpha_l t}} \quad (4.20.d)$$

A solução (4.20.a) satisfaz a equação diferencial (4.18), enquanto a equação (4.20.b) satisfaz a equação diferencial (4.19.a). Aplicando a condição de contorno (4.19.c) e a condição inicial (4.19.d) desde que $E_i(-\infty) \rightarrow 0$, essas condições são usadas para determinar os coeficientes A , B e C .

O balanço de energia ao redor do sorvedouro (*line heat sink*) é descrito pela equação (4.21):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[2\pi k_s \frac{\partial T_s}{\partial r} \right] = Q \quad (4.21)$$

Introduzindo a equação (4.20.b) em (4.21) encontra-se

$$B = -\frac{Q}{4\pi k_s} \quad (4.22)$$

As equações (4.20.a), (4.20.b) e (4.21) são utilizadas na interface da equação (4.19.d), para se obter:

$$A + \frac{Q}{4\pi k_s} E_i(-\lambda^2) = T_i - C E_i\left(\frac{-\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_l}\right) = T_m \quad (4.23)$$

Onde,

$$S(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha_s t} \quad (4.24)$$

A equação (4.23) é válida para todos os valores no tempo. Logo, conclui-se que λ é constante. Os coeficientes A e C são obtidos pela equação (4.23), obtendo-se:

$$A = T_m - \frac{Q}{4\pi k_s} E_i(-\lambda^2) \quad (4.25.a)$$

$$C = \frac{T_i - T_m}{E_i\left(\frac{-\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_l}\right)} \quad (4.25.b)$$

Derivando $S(t)$ da equação (4.25) têm-se

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{2\alpha_s \lambda^2}{s} \quad (4.26)$$

Por fim, introduzindo a equação (4.25.a) e (4.25.b) nas equações (4.20.a) e em (4.20.b) encontra-se a solução para a temperatura na fase sólida e líquida

$$T_s(r, t_j) = T_m + \frac{Q_s}{4\pi k_s} \left[E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_s t}\right) - E_i(-\lambda^2) \right] \quad 0 < r < S(t) \quad (4.27.a)$$

$$T_l(r, t_j) = T_i - \frac{(T_i - T_m)}{E_i\left(\frac{-\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_L}\right)} \left[E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_L t}\right) \right] \quad S(t) < r < \infty \quad (4.27.b)$$

O Autovalor λ é dado pela equação (4.28), abaixo:

$$\frac{Q}{4\pi k_s} e^{-\lambda^2} + \frac{k_L(T_i - T_m)}{E_i\left(\frac{-\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_L}\right)} e^{\frac{-\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_L}} = -\lambda^2 \alpha_s \rho L \quad (4.28)$$

4.2.1 *Problema Inverso usando estimativa de estado e filtros de partículas para o problema de solidificação*

O problema inverso de solidificação que foi estudado tem como objetivo estimar o campo de temperatura, a fronteira de solidificação e o calor latente, utilizando os filtros de partículas SIR e ASIR.

Na solução dos problemas inversos de solidificação, todas as outras quantidades existentes na formulação matemática do problema físico foram consideradas conhecidas de forma exata, porém as medidas de temperaturas apresentaram ruídos. Ainda nesse problema foi utilizado medidas simuladas de temperatura, que foram geradas com um desvio padrão constantes, caracterizando incertezas provenientes do sistema de medidas, como mostra a equação (4.14).

A função de verossimilhança ($\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$) também foi definida pela equação (4.17), em que nesse caso $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ é a solução do problema de solidificação na posição $r=0.01$ m, mas com o tempo variando de zero a 400 segundos para todos os vetores de parâmetros \mathbf{x} . Sendo γ o erro das medidas de temperatura e também aditivo normalmente distribuído, com média zero e desvio padrão conhecido. Logo, as medidas \mathbf{z} foram capturadas na posição $r=0.01$ m com ruído gaussiano, aditivo, com média zero e desvio padrão de 5% da temperatura ambiente da água.

Para resolver o problema inverso utilizando o problema de estimação de estado junto aos filtros de partículas, é necessário definir as variáveis de estados, que nesse problema são o fluxo de calor, a fronteira de solidificação, o campo de temperatura e por fim deve-se determinar os modelos de evolução para cada variável de estado. Por isso, tem-se a equação (4.29) que apresenta o modelo para o fluxo de calor $\mathbf{q}_k = f(\mathbf{q}_{k-1}, \mathbf{u}_{\mathbf{q}_{k-1}}, \mathbf{v}_{\mathbf{q}_{k-1}})$, a equação (4.30) que mostra o modelo para a fronteira de solidificação $\mathbf{s}_k = f(\mathbf{s}_{k-1}, \mathbf{u}_{\mathbf{s}_{k-1}}, \mathbf{v}_{\mathbf{s}_{k-1}})$ e a equação (4.31) que exibe o modelo para o campo de temperatura $\mathbf{T}_k = f(\mathbf{T}_{k-1}, \mathbf{u}_{\mathbf{T}_{k-1}}, \mathbf{v}_{\mathbf{T}_{k-1}})$.

$$q_k = q_{k-1} + \sigma_q W_q \quad (4.29)$$

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) + 2\lambda\sqrt{\alpha_s}(\sqrt{t_k} - \sqrt{t_{k-1}}) + \sigma_s W_s \quad (4.30)$$

Para $r < S(t_{k-1})$

$$T_s(r, t_k) = T_s(r, t_{k-1}) + \frac{Q_s}{4\pi k_s} \left[E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_s t_k}\right) - E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_s t_{k-1}}\right) \right] + \sigma_T W_k$$

Para $S(t_k) < r$

$$T_L(r, t_k) = T_L(r, t_{k-1}) - \frac{(T_i - T_m)}{E_i\left(\frac{-\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_L}\right)} \left[E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_L t_k}\right) - E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_L t_{k-1}}\right) \right] + \sigma_T W_k$$

Para $S(t_{k-1}) < r < S(t_k)$

$$T_s(r, t_k) = T_L(r, t_{k-1}) + \frac{Q_s}{4\pi k_s} \left[E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_s t_k}\right) - E_i(\lambda^2) \right] + (T_i - T_m) \left[-1 + \frac{E_i\left(\frac{-r^2}{4\alpha_L t_{k-1}}\right)}{E_i\left(\frac{-\lambda^2 \alpha_s}{\alpha_L}\right)} \right] + \sigma_T W_k$$

(4.31)

Nota-se que as funções que vão gerar as partículas $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ para os algoritmos dos filtros de partículas são representados pelas equações (4.29), (4.30) e (4.31). O modelo de evolução escolhido para o fluxo de calor foi novamente o passeio aleatório, devido à falta de conhecimento dessa variável, em que W_q são números randômicos dados por uma distribuição normal com média zero e desvio unitário. Para esta variável de estado o desvio padrão dado por σ_q , foi utilizado 0.25 W/m.

A fronteira de solidificação do modelo foi baseado na equação (4.24), repare que para essa variável de estado tem-se uma formulação matemática, onde W_s são números randômicos dados por uma distribuição normal, com média zero e desvio unitário; e σ_s foi utilizado 1% do valor máximo encontrado pela fronteira de solidificação.

Por fim, tem-se o modelo de evolução do campo de temperatura, como mostra a equação (4.31) que foi baseada nas equações (4.27.a) e (4.27.b). Nota-se que para estas variáveis de estado têm-se três etapas para o modelo de evolução. Isto acontece porque o cálculo da temperatura depende da posição da fronteira de solidificação. Então, como o modelo de evolução depende das informações do tempo anterior, para a estimativa do campo de temperatura do fluido tem-se os seguintes casos: (i) fase líquida; (ii) há mudança da fase líquida para a fase sólida e; (iii) fase sólida. Para o desvio padrão do

campo de temperatura dado por σ_T , foi utilizado um valor de 1% da temperatura inicial $T_i=25^\circ\text{C}$.

As tabelas 4.3 e 4.4 mostram a adaptação feita para a estimação do filtro SIR e filtro ASIR para a estimação do fluxo de calor, fronteira de solidificação e campo de temperatura.

Tabela 4.3: Algoritmo do filtro SIR para o problema de solidificação

1. <u>Inicialização</u>
1.1 Faça $k=1$;
1.2 Gere um conjunto de partículas pelo modelo de evolução $q_k^i = q(k-1) + \sigma_Q W_Q$ $s_k^i = S(t_{k-1}) + 2\lambda\sqrt{\alpha_s}(\sqrt{t_k} - \sqrt{t_{k-1}}) + \sigma_s W_s$
2. <u>Avaliação dos Pesos</u>
2.3 Calcule os pesos: $w_k^i = \pi(\mathbf{z}_k q_k^i, s_k^i) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(q_k^i, s_k^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}}(\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(q_k^i, s_k^i))\right]$
2.2 Normalizem os pesos: $\hat{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^N w_k^i}$
3. <u>Reamostragem ou Seleção</u>
3.1 Reamostragem das partículas são dados abaixo:
3.1.1 Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{w}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
3.1.2 Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
3.1.3 Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1}(j-1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $Q_k^j = Q_k^i$.
• Designe os pesos para $w_k^j = N^{-1}$.
4. <u>Calculo da Média da posteriori</u> $Q(k) = \sum_{i=1}^N Q_k(i) \cdot w_k^{(i)}$ $S(k) = \sum_{i=1}^N S_k(i) \cdot w_k^{(i)}$
5. <u>Evolução do Modelo</u>
○ Faça $k = k + 1$. Se $k = k_{\text{final}} + 1$, então pare.
○ $q_k^i = q(k-1) + \sigma_Q W_Q$
• $s_k^i = S(t_{k-1}) + 2\lambda\sqrt{\alpha_s}(\sqrt{t_k} - \sqrt{t_{k-1}}) + \sigma_s W_s$ para $i = 1, \dots, N$.
Retorne para passo 2.

Tabela 4.4: Algoritmo do filtro ASIR para o problema de solidificação

1. Inicialização
a. Faça $k=1$;
b. $\mathbf{w}_{k-1}^{(i)} = 1/N$
2. Cálculo da amostra do estado do sistema para a Variável Auxiliar
$\mathbf{u1}_k^i = \mathbf{q}_k^i = \mathbf{q}(k-1) + \sigma_Q W_Q$ $\mathbf{u2}_k^i = \mathbf{s}_k^i = S(t_{k-1}) + 2\lambda\sqrt{\alpha_s}(\sqrt{t_k} - \sqrt{t_{k-1}}) + \sigma_s W_s$
3. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança: $\mathbf{w}_k^i = \mathbf{w}_{k-1}^i (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i))\right]$
b. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^i = \frac{\mathbf{w}_k^i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^i}$
4. Reamostragem ou Seleção
a. Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{\mathbf{w}}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
b. Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
c. Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1}(j-1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $\mathbf{u1}_k^{\beta^j} = \mathbf{u1}_k^i$ e $\mathbf{u2}_k^{\beta^j} = \mathbf{u2}_k^i$
5. Calculem a função de verossimilhança de: $\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i))\right]$
6. Evolução do Modelo
a. Calcule as partículas: $\mathbf{q}_k^i = \mathbf{u1}_k^{\beta^j} + \sigma_Q W_Q$ $\mathbf{s}_k^i = \mathbf{u2}_k^{\beta^j} + 2\lambda\sqrt{\alpha_s}(\sqrt{t_k} - \sqrt{t_{k-1}}) + \sigma_s W_s$ para $i = 1, \dots, N$.
7. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança $\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{q}_k^i, \mathbf{s}_k^i) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{q}_k^i, \mathbf{s}_k^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{q}_k^i, \mathbf{s}_k^i))\right]$
b. Calcule os novos pesos: $\mathbf{w}_k^i = \frac{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{q}_k^i, \mathbf{s}_k^i)}{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u1}_k^{\beta^j}, \mathbf{u2}_k^{\beta^j})}$
c. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^{(i)} = \frac{\mathbf{w}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^{(i)}}$
8. Calculo da Estimativa do Estado Atual
$\mathbf{Q}(k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_k(i) \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$ e $\mathbf{S}(k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_k(i) \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$
a. Faça $k = k + 1$, se $k = t_{\text{final}} + 1$, então pare. Com as novas partículas, retorne ao segundo passo.

4.3 Problema de Propagação de Incêndio

Os incêndios florestais são um dos maiores desastres naturais que ameaçam o mundo. Cada ano, milhares de hectares de áreas cobertas de vegetação são consumidas pelo fogo, colocando em risco toda a fauna e flora, como mostra a figura 4.3.

Sendo assim o estudo do comportamento do fogo tornou-se uma necessidade para qualquer sociedade, tanto para a prevenção e combate aos incêndios, como para os setores que aproveitam o fogo como fator essencial ao seu desenvolvimento.



Figura 4.3: Incêndios Florestais (ROTHERMEL, 1972)

A propagação da chama é um fenômeno complexo que envolve muitos processos físicos e químicos. Porém, esta tese não tem como objetivo fazer um estudo detalhado do modelo de propagação do fogo, como apresentado por VIEGAS (1998). Pretende-se, assim, apresentar uma descrição simples dada por FONS e MCDONALD (1998) para ajudar no entendimento do mecanismo de propagação do fogo. Esta descrição visualiza um processo dado por uma série de ignição que vai da área queimada para a região não queimada, onde o mecanismo de ignição pode ser dividido em quatro etapas, como mostra a figura 4.4:

- I. O calor é fornecido pela chama para o combustível (a vegetação) à frente da fronteira da chama.
- II. A superfície é desidratada.
- III. Pirólise¹;
- IV. Quando a taxa de liberação do gás do combustível é suficiente para manter a combustão, o gás se torna o dispositivo para a ignição da chama e o fogo avança para uma nova posição. Estes passos são ilustrados pela figura (4.4):

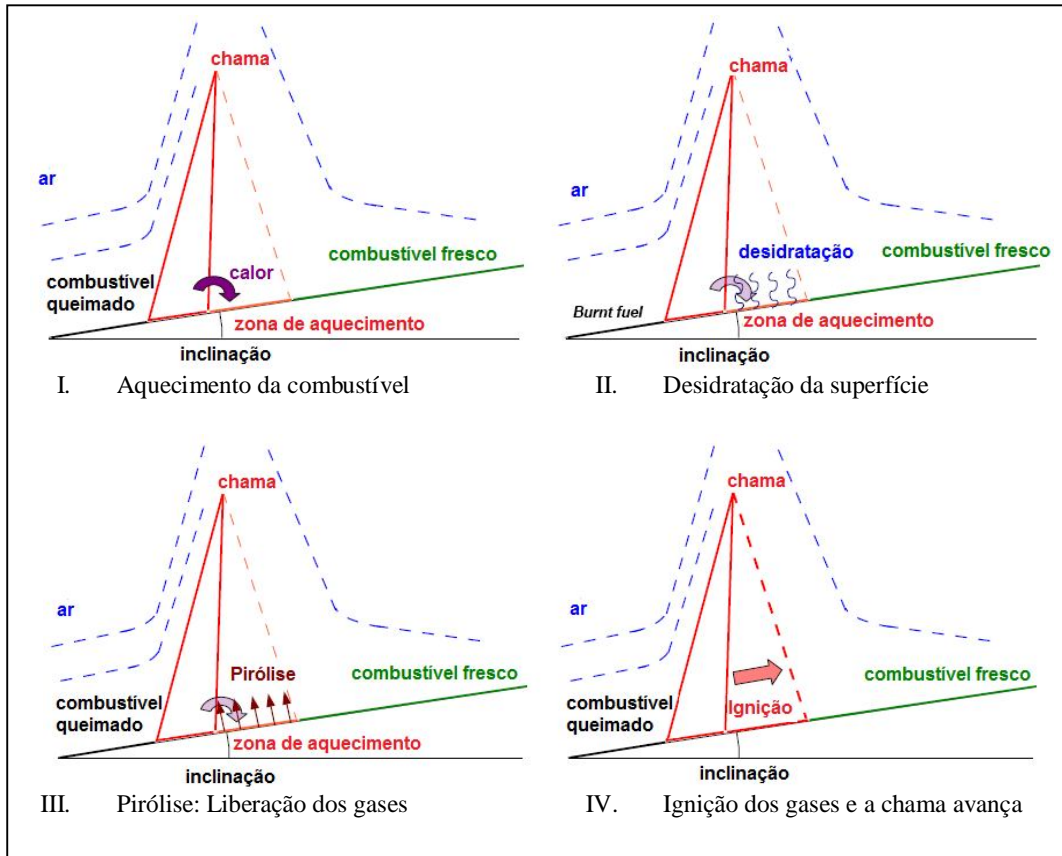


Figura 4.4: As etapas do mecanismo de ignição (DELMOTTE *et al*, 2011)

Nos últimos 50 anos, inúmeras pesquisas foram realizadas sobre o comportamento dos incêndios florestais. Isso tem proporcionado o aparecimento de diversos modelos de propagação de incêndio. Esses modelos são considerados ferramentas para prever a taxa propagação da frente da chama quando os fatores de propagação são descritos; isto é, velocidade e direção do vento, inclinação do local, propriedades da vegetação como: carga combustível, umidade e etc. Geralmente a velocidade de propagação do fogo (Rate of fire spread - ROS) representado por R é uma função que depende da influência da velocidade do vento U , inclinação do terreno α , do teor de umidade M_f e outros parâmetros que são representados por V_f que caracteriza a vegetação. Logo, tem-se:

$$R = R(U, \alpha, M_f, V_f) \quad (4.32)$$

O relatório publicado em ROTHERMEL (1972), resultante de anos de pesquisa conduzido pelo Serviço Florestal dos Estados Unidos, em especial, pelo Northern Forest Fire Laboratory, propõe um modelo para estimar a velocidade de propagação do fogo baseado em estudos teóricos desenvolvidos anteriormente por FRANDSEN (1971). Esse modelo apresenta uma boa representação da física do fogo com um baixo custo computacional e uma grande capacidade de mudar de uma escala para outra, o que é uma vantagem. Os detalhes do modelo de Rothermel são apresentados no apêndice A.

Esse trabalho não têm como objetivo fazer a modelagem da propagação do incêndio, já que foram utilizados códigos cedidos pelo CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique – França), portanto tem como meta avaliar o desempenho dos filtros de partículas neste tipo de problema.

O código utilizado apresentava um modelo baseado nas equações de reação-difusão para simular um incêndio em grande escala, em que a temperatura e o combustível são acoplados utilizando a ideia da variável de progresso; e em que toda a física do problema foi colocada dentro de um parâmetro, denominado, $S_{L,KPP}$. Em seguida, foi substituído o parâmetro $S_{L,KPP}$ pela formulação da velocidade de propagação do fogo, denominado como **ROS**, como apresentado pela equação (4.32) e foi utilizado um novo código que usava o método de level Set para resolver o problema da propagação do fogo.

4.3.1 *Propagação de Incêndio em um Campo*

O modelo do incêndio usado nesse trabalho foi da chama pré-misturada, baseada nas equações de conservação (massa, momento, energia, espécie). Esse modelo foi sugerido e validado pela Universidade de Maryland (Estados Unidos) e pelo CERFACS. Nesse modelo foram empregadas as seguintes hipóteses: (i) a massa específica ρ foi assumida como constante; (ii) a convecção é negligenciada; (iii) a pressão é constante; (iv) A chama é considerada adiabática. O modelo também assume de uma cinética de reação de passo simples. A etapa da pirólise não é contemplada no modelo. O número de Lewis, que corresponde razão entre a difusividade térmica e a difusividade das espécies, foi adotado como unitário $\left(Le = \frac{D}{\rho(\alpha D)C_p} \approx 1 \right)$. Esse

modelo empregado foi colocado em condições estequiométricas e introduziram a variável de progresso c . Essa variável para ROCHOUX *et al*, (2010) representava a temperatura adimensional, tanto para $c=1$ que significa a área queimada, quanto para a área não queimada representada por $c=0$ (gás fresco). A chama é descrita na região entre 0 à 1, como mostra a figura 4.5.

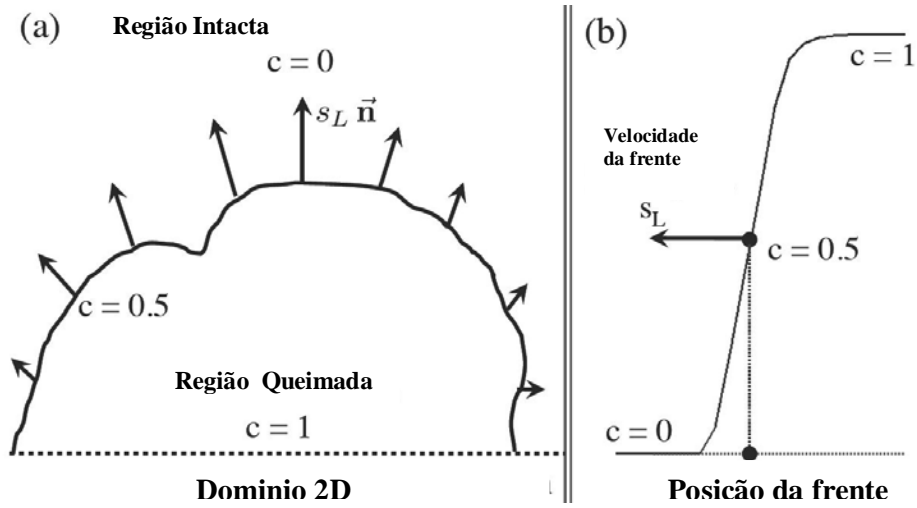


Figura 4.5: Modelo da variavel de progresso (SILVA *et al*, 2012)..

Agora, tem-se a nova equação para a propagação do fogo dada por

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla \cdot (\nabla c) + a(1-c)c \quad (4.33)$$

ROCHOUX *et al*, (2010), fez uma relação entre a velocidade da chama $s_{L,KPP}$ e a espessura $\delta_{L,KPP}$ da chama com os parâmetros D e a , da seguinte forma:

$$\begin{cases} s_{L,KPP} = 2\sqrt{aD} \\ \delta_{L,KPP} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{a}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = s_{L,KPP} \delta_{L,KPP} \\ a = \frac{1}{4} \frac{s_{L,KPP}}{\delta_{L,KPP}} \end{cases} \quad (4.34)$$

Agora re-escrevendo a equação (4.33):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = s_{L,KPP} \delta_{L,KPP} \nabla \cdot (\nabla c) + \frac{s_{L,KPP}}{4\delta_{L,KPP}} c(1-c) \quad (4.35)$$

No entanto, ROCHOUX *et al* (2010) mostraram a necessidade de introduzir um parâmetro numérico em termos de tamanho do passo da malha, tipicamente $\delta_{L,KPP} = 8\delta$, com $\delta = \min(dx, dy)$ e um parâmetro numérico β , para garantir uma espessura numérica constante. Isto leva a uma nova definição $\delta_{L,KPP} = 8\beta\delta$, $\beta = O(1/2)$. Logo, tem-se uma nova definição para D e a da seguinte forma.

$$\begin{cases} \sqrt{aD} = \frac{s_{L,KPP}}{2} \\ \sqrt{\frac{D}{a}} = \beta\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \frac{1}{2} \beta s_{L,KPP} \delta \\ a = \frac{1}{2\beta\delta} s_{L,KPP} \end{cases} \quad (4.36)$$

A equação (4.37) permite expressar a velocidade e a espessura como sendo os coeficientes da equação de reação e difusão, onde a distribuição de combustível não é uniforme.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left(\frac{\beta\delta s_{L,KPP}}{2} \right) \nabla \cdot (\nabla c) + \left(\frac{1}{2\beta\delta} s_{L,KPP} \right) c(1-c) \quad (4.37)$$

ROCHOUX *et al* (2010), mostraram também que a equação (4.37), precisa acrescentar a dependência do combustível. Por isso, tem-se a equação (4.38) que representa a propagação do fogo para modelar o incêndio.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \left(\frac{\beta \bar{S}_L \delta}{2} \right) \nabla \cdot (\nabla c) + \left(\frac{\bar{S}_L}{2\beta\delta} \right) c(1-c) \quad (4.38)$$

Onde \bar{s}_L é a velocidade de propagação média sobre a espessura da frente, \bar{S}_L . O último termo da equação (4.38) representa o termo fonte da combustão química, e o coeficiente \bar{S}_L/δ_L , corresponde o tempo da residência da chama e a fração de massa do combustível local e instantâneo representado por $1 - c$.

O modelo descrito pela equação (4.38) representa a propagação da frente da chama, associado ao gradiente da variável de progresso c (localizado ao longo da linha do isocontorno $c = 0.5$), entre a área não queimada e a área queimada, como mostra a figura 4.5. Esse modelo concentra toda a física da propagação dentro da formulação da velocidade de propagação média sobre a espessura da frente \bar{s}_L . Porém, ROCHOUX *et al*, (2010) utilizaram uma velocidade de propagação local s_L que é linearmente dependente da fração de massa inicial do combustível Y ($0 < Y < 1$). Sendo o coeficiente de proporcionalidade $s_{L,KPP}(t)$ dado como uma função do tempo em m/s :

$$s_L(x, y, t) = s_{L,KPP}(t)Y(x, y) \quad (4.39)$$

O modelo de propagação da velocidade descrita pela equação (4.39) pode ser representado pelo modelo de Rothermel (ROTHERMEL, 1972) considerando que o coeficiente de proporcionalidade $s_{L,KPP}(t)$ depende de um número reduzido de parâmetros, tais como as propriedades do combustível vegetal (umidade da vegetação, compacidade e relação de superfície - volume de partículas de combustível vegetal, etc.), a inclinação do terreno ou da intensidade do vento. Essas diferentes contribuições para a velocidade de propagação não distinguem-se neste estudo, porque a validade deste modelo é limitada pela incerteza dos parâmetros de entrada do modelo, ou seja, em $s_{L,KPP}(t)$.

A distribuição inicial da vegetação (combustível que se encontra antes do fogo) Y pode-se considerada de qualquer tipo, por exemplo, uma chama circular centralizada no campo.

O objetivo foi estudar a velocidade de chama local (ou seja, a velocidade de propagação local) depende de uma única variável que representa os efeitos de uma distribuição da vegetação no domínio computacional, supondo que a localização inicial do fogo é conhecida.

$$\mathbf{s}_{kpp_k} = \mathbf{s}_{kpp_{k-1}} + \sigma_{skpp} W_{skpp} \quad (4.40)$$

As partículas $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ são geradas no algoritmo dos filtros de partículas pela equação (4.40) e pela solução do problema direto dado pelo CERFACS para o problema de propagação de incêndio em um campo. Para a velocidade da chama foi utilizado o passeio aleatório, onde W_{skpp} são números randômicos dados por uma distribuição normal, com média zero e desvio unitário e o desvio padrão igual a 0.25 m/s. Esse valor foi escolhido de forma arbitrária.

4.3.2 *Problema Inverso para propagação de incêndio em um campo*

O problema inverso de propagação de incêndio em um campo tem como o objetivo recuperar a variável de progresso e a velocidade de propagação local da chama utilizando os seguintes algoritmos: o filtro de partículas SIR, o algoritmo filtro ASIR.

Na primeira etapa do problema de propagação de incêndio, foram usadas medidas simuladas (denominada variável de progresso), que foram geradas com um desvio padrão constante caracterizando incertezas originárias do sistema de medidas, como mostra a equação (4.14).

A função de verossimilhança ($\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$) também foi definida pela equação (4.17), onde $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ é a solução do problema direto nas posições e no tempo apresentada na tabela 4.5. Onde γ é o erro das medidas, sendo considerado aditivo normalmente distribuído com média zero e desvio padrão conhecido. Logo, \mathbf{z} foram medidas nas posições mostradas na tabela 4.5 com ruído gaussiano, aditivo, com média zero e desvio padrão de 0.01, cuja a malha utilizada foi de tamanho 201x201 ($dx=dy=1$) e $dt=0.5$.

Nesse trabalho não foi feito um estudo sobre como escolher esses desvios padrões, porque o objetivo era trabalhar com medidas experimentais, mas a escolha desse desvio padrão para as medidas é complicada, porque quanto maior o ruído, mas difícil é a estimação, já que maior será a influência desses ruídos nas medidas. Isso porque, a estimação será feita em cima dos ruídos e não das medidas.

A modelagem do problema inverso utilizando o problema de estimação de estado junto aos filtros de partículas é definida através das variáveis de estados, que nesse problema são representadas pela variável de progresso e pela velocidade de propagação local da chama. Ainda torna-se necessário determinar os modelos de evolução para cada variável de estado. A equação (4.40) representa o modelo de evolução para a velocidade de propagação da chama local $\mathbf{s}_{kpp_k} = f(\mathbf{s}_{kpp_{k-1}}, \mathbf{u}_{spp_{k-1}}, \mathbf{v}_{skpp_{k-1}})$ e para o modelo de evolução da variável de progresso $\mathbf{c}_k = f(\mathbf{c}_{k-1}, \mathbf{u}_{c_{k-1}}, \mathbf{v}_{c_{k-1}})$ é dado pela solução do problema direto utilizando diferenças finitas para o espaço e o Método de Runge Kutta para o tempo, acrescentando um ruído de uma distribuição gaussiana com média zero e desvio padrão igual a 0.01.

Tabela 4.5: Posições dos sensores da variável de progresso

Fogo	Vegetação	Posição em X	Posição em Y					Tempo
Circular	Aleatória	97	90	95	100	105	110	$0 < t \leq 100$
Circular	Aleatória	87	90	95	100	105	110	$100 < t \leq 300$
Circular	Aleatória	77	90	95	100	105	110	$300 < t \leq 400$
Circular	Aleatória	137	90	95	100	105	110	$400 < t \leq 500$
Circular	Aleatória	147	90	95	100	105	110	$500 < t \leq 680$
Circular	Aleatória	157	90	95	100	105	110	$680 < t \leq 800$

As tabelas 4.6 e 4.7 mostram a adaptação feita para a estimação do filtro SIR e do filtro ASIR para a estimação da velocidade do vento do problema de propagação de incêndio em um campo.

Tabela 4.6: Algoritmo do filtro SIR para o problema de propagação de incêndio em um campo.

1. <u>Inicialização</u>
1.1 Faça $k=1$;
1.2 Gere um conjunto de partículas pelo modelo de evolução $\mathbf{s}_{kpp}^i = \mathbf{s}_{kpp}(k-1) + \sigma_{skpp} W_{skpp}$
2. <u>Avaliação dos Pesos</u>
2.4 Calcule os pesos: $w_k^i = \pi(\mathbf{z}_k \mathbf{s}_{kpp}^i) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{cov}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{s}_{kpp}^i))^T \mathbf{W}_{cov} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{s}_{kpp}^i)) \right]$
2.2 Normalizem os pesos: $\hat{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^N w_k^i}$
3. <u>Reamostragem ou Seleção</u>
3.1 Reamostragem das partículas são dados abaixo:
3.1.1 Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{w}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
3.1.2 Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
3.1.3 Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $\mathbf{s}_{kpp}^j = \mathbf{s}_{kpp}^i$.
• Designe os pesos para $w_k^j = N^{-1}$.
4. <u>Calculo da Média da posteriori</u> $\mathbf{s}_{kpp}(k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_{kpp}^i(i) \cdot w_k^{(i)}$
5. <u>Evolução do Modelo</u>
5.2 Faça $k = k + 1$. Se $k = k_{final} + 1$, então pare.
$\mathbf{s}_{kpp}^i = \mathbf{s}_{kpp}(k-1) + \sigma_{skpp} W_{skpp} \text{ para } i = 1, \dots, N.$
Retorne para passo 2.

Tabela 4.7: Algoritmo do filtro ASIR para o problema de propagação de incêndio em um campo.

1. Inicialização
a. Faça $k=1$;
b. $\mathbf{w}_{k-1}^{(i)} = 1/N$
2. Cálculo da amostra do estado do sistema para a Variável Auxiliar
a. Calcule $\mathbf{u}_k^i = \mathbf{s}_{kpp}^i = \mathbf{s}_{kpp}(k-1) + \sigma_{skpp} W_{skpp}$
3. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança:
$\mathbf{w}_k^i = \mathbf{w}_{k-1}^i (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{cov}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^i))^T \mathbf{W}_{cov} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^i)) \right]$
b. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^i = \frac{\mathbf{w}_k^i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^i}$
4. Reamostragem ou Seleção
g. Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{\mathbf{w}}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
h. Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
i. Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $\mathbf{u}_k^{\beta^j} = \mathbf{u}_k^i$
5. Calculem a função de verossimilhança de:
$\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u}_k^{\beta^j}) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{cov}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^{\beta^j}))^T \mathbf{W}_{cov} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u}_k^{\beta^j})) \right]$
6. Evolução do Modelo
a. Calcule as partículas: $\mathbf{s}_{kpp}^i = \mathbf{u}_k^{\beta^j} + \sigma_Q W_Q$ para $i = 1, \dots, N$.
7. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança
$\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{s}_{kpp}^{(i)}) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{cov}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{s}_{kpp}^i))^T \mathbf{W}_{cov} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{s}_{kpp}^i)) \right]$
b. Calcule os novos pesos: $\mathbf{w}_k^i = \frac{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{s}_{kpp}^i)}{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u}_k^{\beta^j})}$
c. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^{(i)} = \frac{\mathbf{w}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^{(i)}}$
8. Calculo da Estimativa do Estado Atual
a. $\mathbf{s}_{kpp}(k) = \sum_{i=1}^N \mathbf{s}_{kpp}^i(i) \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$
b. Faça $k = k + 1$, se $k = t_{final} + 1$, então pare.
Com as novas partículas, retorne ao segundo passo.

4.3.3 Introdução do modelo de ROTHERMEL

Nesta parte do trabalho, foi utilizado o código e a formulação de DELMOTTE *et al* (2011), cedido pelo CERFACS para o **ROS**, ilustrado pela equação (4.41).

$$R = R(\beta, \Sigma, M_f, \delta(x, y), U(x, y, t), \tan(\varphi)) \quad (4.41)$$

Onde, $\tan(\varphi)$ é a inclinação do terreno, $U(x, y, t)$ é a amplitude do vento na direção normal da frente da chama.

Tem-se também que o estudo de parâmetro na formulação do ROTHERMEL mostra que, a condição de *centeris paribus*. A condição de *centeris paribus* é muito usada na economia (mas não só), em razão da complexidade da análise onde existe um número indeterminado de variáveis de influência remota que podem, eventualmente, desconectar a observação do resultado. Pelo que existe a necessidade de reduzir o número de variáveis dentro de todo o conjunto daquelas que são suscetíveis de exercer influência permanente ou esporádica sobre o fenómeno, para que este possa ser explicado:

O **ROS** tem uma dependência linear da espessura do combustível $\delta(x, y)$:

$$R(x, y, t) = \tau(x, y, t) \delta(x, y) \quad (4.42)$$

Com, $\tau[s^{-1}]$: a constante de proporcionalidade.

$$\tau(x, y, t) = f(\beta, \Sigma, M_f, U(x, y, t), \tan(\varphi)) \quad (4.43)$$

A função f determina a constante de proporcionalidade, onde esta função é descrita em ROTHERMEL (1972).

Como a espessura é essencial para a vegetação, esta dependência linear torna-se importante para calibração dos parâmetros. Na qual foi utilizada uma espessura do combustível normalizada, ou seja:

$$\bar{\delta}(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{\delta_0} \quad (4.44)$$

Onde δ_0 é a profundidade máxima do combustível.

DELMOTTE *et al* (2011) utilizaram a hipótese de um incêndio florestal, numa escala macroscópica, com uma topologia que é similar as chamas pré-misturada (WEBER, 1991), onde o oxidante foi misturado com o combustível antes de atingir a frente da chama. Isso cria uma frente de chama fina, já que todos os reagentes estão prontamente disponíveis.

As técnicas para lidar com interfaces finas estão disponíveis na literatura. Entre elas estão os métodos rastreamento (tracking methods), conhecidos por fornecer melhor precisão. Esses métodos têm essencialmente o mesmo objetivo: Partem de uma posição na interface, com uma velocidade de propagação e calculam a posição no tempo posterior. Cada método possui um compromisso diferente, como por exemplo: o custo computacional, a precisão, desenvolvimento e custo de implementação, e outras propriedades desejáveis. Um exemplo desses métodos é o método Level set.

De acordo com DELMOTTE *et al* (2011) a chama foi considerada como uma interface entre gases queimados e frescos, de modo que a frente da chama pode ser descrita por uma reação escalar da variável de progresso c , como mostra esta figura 4.6.

- $c \geq 1^-$: a vegetação esta queimada. $c = 1^-$ é o lado da interface onde se encontra a vegetação queimada.
- $0^+ \leq c \leq 1^-$: zona da fronteira. $c = 0^+$ é o lado da interface onde se encontra a vegetação fresca.

- $0 \leq c \leq 0^+ : \text{Vegetação não queimada.}$

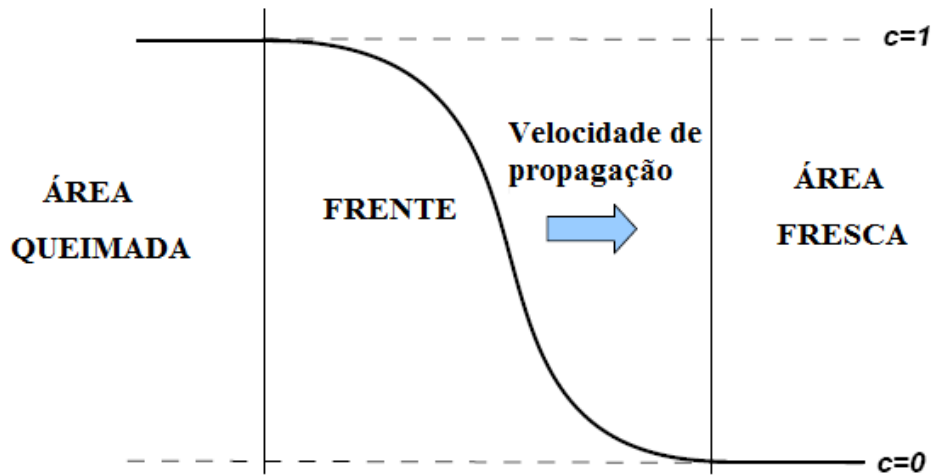


Figura 4.6: Variável de progresso c DELMOTTE *et al* (2011).

O Level Set é um método de controle que geralmente é usado para modelar a evolução de uma interfase em movimento. A idéia central deste método foi desenvolvida por (OSHER e SETHIAN , 1988). Hoje em dia este modelo é mais utilizado em combustão (KERNSTEIN *et al* , 1988) ou mais especificamente em problemas de controle da frente. O método Level set tem sido experimentado na propagação de incêndio florestal por (MALLET *et al*, 2009, REHM e MCDERMOTT, 2009) e veem apresentando resultados promissores.

Na propagação de incêndio é difícil descrever o que passa na fronteira do fogo, ou seja, nas condições limites. Por isso, que normalmente essas condições são analisadas caso por caso. Como por exemplo: Há situações que apresentam as Porta Corta Fogo (contre-feu), onde o fogo não vai sair do domínio, já que a frente é bloqueada e há casos que têm uma propagação livre ou total. A formulação de DELMOTTE *et al* (2011) utilizaram as portas corta fogo em volta do domínio, porque foi preferível limitar as condições de fronteiras para que a frente, não saísse do domínio.

DELMOTTE *et al* (2011) consideraram só a advecção, a interfase $\{c = 0.5\}$ é garantida, graças a uma integração numérica exata, que consegue propagar e descrever a velocidade R . Sabendo que R contém toda a física do fogo.

A equação Level set descreve a propagação da frente, ilustrado pela equação (4.45) e pela figura 4.7:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{R} \cdot \vec{\nabla} c &= 0, & \forall x, y \in \Omega, t \in [0, t_f] \\ c(x, y, 0) &= c_0(x, y), & \forall x, y \in \Omega \\ \nabla c(x, y, t) \cdot \vec{n}_{\partial\Omega}(x, y) &= 0, & \forall x, y \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (4.45)$$

Onde,

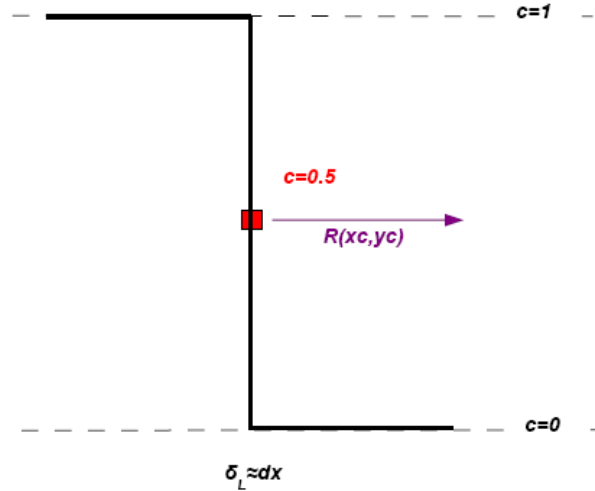


Figura 4.7: Propagação da frente da chama usando equação do Level set DELMOTTE et al (2011).

Sendo R a velocidade de propagação do fogo na direção normal dos ISO-contornos da variável de progresso c . DELMOTTE *et al* (2011), escolheram a solução proposta por REHM e MCDERMOTT, (2009) para o problema (4.45), ou seja, eles usaram o método de Runge-Kutta para a integração no tempo e o método redução de variação total (TVD - total variation diminishing) junto com os limitadores SUPERBEE para a discretização do espaço.

Uma observação importante na equação (4.45) é que o operador nábla (∇) não é um laplaciano, mas sim a norma do gradiente e também não corresponde à equação de

difusão, mas a equação de propagação. DELMOTTE *et al* (2011) mostraram que o método de Level Set apresenta uma solução mais rápida que o método de reação-difusão e uma melhor precisão nos resultados. Os autores afirmaram também que o método de Level Set apresentou uma melhor adaptação para a propagação do fogo em escala macroscópica e por isso, a utilização desse método para a solução numérica do problema. Mais detalhes da implementação desse problema é apresentada por DELMOTTE, (2011) e ROCHOUX *et al* (2012).

4.3.4 *Problema Inverso para incêndio em escala de laboratório*

O problema inverso da propagação de incêndio em escala de laboratório descrito acima foi dividido em duas partes: a primeira parte o objetivo foi estimar a relação área de superfície/volume das partículas e o teor umidade do combustível representado pelo efeito da vegetação uniforme, sendo usadas medidas experimentais da chama, com intervalos de tempo de 14 segundos, ilustrada por imagens infravermelhas e pelo modelo semi-empírico de ROTHERMEL (1972) para a propagação da chama.

Na segunda etapa o objetivo foi estimar a relação área de superfície/volume das partículas, o teor umidade do leito do combustível e a velocidade do vento. Também foi utilizada uma série de imagens que mostra o tempo de evolução da área queimada do incêndio, porém com uma frequência de tempo de 28 segundos. A tarefa de estimar os parâmetros foi feita pelos filtros Bayesianos: SIR e ASIR.

A modelagem do problema inverso utilizando o problema de estimação de estado junto aos filtros de partículas é definida pelas variáveis de estados, que nesse caso são representadas pela relação área de superfície/volume das partículas, o teor umidade do leito do combustível, a amplitude do vento e pela variável de progresso, onde os modelos de evolução para cada variável de estado são apresentadas pelas equações (4.46), (4.47) e (4.48).

A equação (4.46) apresenta o modelo de evolução para relação área de superfície/volume das partículas $\Sigma_k = f(\Sigma_{k-1}, \mathbf{u}_{\Sigma_{k-1}}, \mathbf{v}_{\Sigma_{k-1}})$, a equação (4.47) apresenta o modelo de evolução para o teor umidade do leito do combustível $\mathbf{M}_{f_k} = f(\mathbf{M}_{f_{k-1}}, \mathbf{u}_{\mathbf{M}_{k-1}}, \mathbf{v}_{\mathbf{M}_{k-1}})$, e a equação (4.48) apresenta o modelo de evolução para a amplitude do vento $\mathbf{V}_k = f(\mathbf{V}_{k-1}, \mathbf{u}_{\mathbf{V}_{k-1}}, \mathbf{v}_{\mathbf{V}_{k-1}})$, já o modelo de evolução para a

variável de progresso $\mathbf{c}_k = f(\mathbf{c}_{k-1}, \mathbf{u}_{\mathbf{c}_{k-1}}, \mathbf{v}_{\mathbf{c}_{k-1}})$ é dado pela solução do problema direto usando o método de Runge-Kutta para a integração no tempo e o método redução de variação total (TVD - total variation diminishing) junto com os limitadores SUPERBEE para a discretização do espaço.

$$\Sigma_k = \Sigma_{k-1} + \sigma_\Sigma W_\Sigma \quad (4.46)$$

$$M_{f_k} = M_{f_{k-1}} + \sigma_M W_M \quad (4.47)$$

$$V_v(t_k) = V_v(t_{k-1}) + u(t_{k-1}) + \sigma_v W_v \quad (4.48)$$

Esses modelos de evolução geram as populações de partículas, ou seja, $\mathbf{x}_k^i = \pi(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i)$ exibido nos algoritmos dos filtros de partículas que são representados pelas equações (4.46), (4.47), (4.48) e pela solução do problema direto dado pelo CERFACS para o problema de propagação de incêndio em escala de laboratório. Onde W_Σ , W_M e W_v são números randômicos dados por uma distribuição normal, com média zero e desvio unitário.

Uma questão chave para esses modelos seria como determinar os desvios padrões, ou seja, σ_M e σ_Σ . No entanto, a avaliação desses valores foram fundamentados, em cima das estimativas de Rothermels $M_f = 22$ e $\Sigma = 11500 \text{ m}^{-1}$, que são apontadas como valores bases da literatura atual, porém não existe conhecimento das incertezas sobre esses parâmetros (DELMOTTE *et al* (2011) e ROCHOUX *et al* (2012)), por isso foram utilizados valores iguais a 30% dos valores obtidos do banco de dados de combustível de Rothermels.

A equação (4.48) apresenta u que é a informação dada pela figura 4.8, cujos valores representam a amplitude real do vento em cada tempo. Os valores de dados u foram gerados por uma interpolação de splines cúbicos, em que os pontos utilizados por essa interpolação foram retirados de forma manual da figura 4.8 e σ_v igual a 10% do valor do tempo anterior.

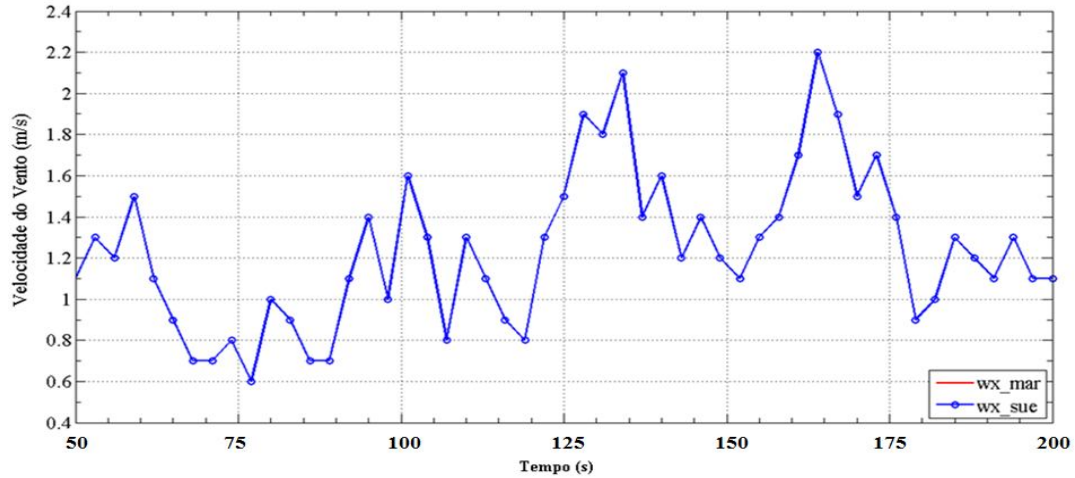


Figura 4.8: Informação da velocidade do vento.

O CERFACS fixou dx e dy igual ao erro das medidas ou das observações dadas pela resolução da câmera infravermelha (4.7 cm), ou seja, $\sigma_o = dx = dy = 4.7$ cm e $dt=0.02$. Como já mencionado, a solução do problema de propagação de incêndio em escala de laboratório com o método de Runge-Kutta para a integração no tempo e o método redução de variação total (TVD - total variation diminishing) junto com os limitadores SUPERBEE para a discretização do espaço, onde foi definida uma malha de tamanho 90×85 ($n_x \times n_y$).

Já o experimento tinha as dimensões 4.185 m x 3.978 m em um plano horizontal. A vegetação tinha uma espessura uniforme de 8 cm, a umidade e a relação superfície/volume foram dados pelos seguintes valores, $M_f = 22\%$ e $\Sigma = 11500 \text{ m}^{-1}$ (valores obtidos do banco de dados de combustível de Rothermels). A propagação do incêndio está ocorrendo em condições de vento moderado, sendo uniforme e constante, com uma amplitude de 1.0m/s. Todos os detalhes desse experimento encontram-se nos sites (<http://wildfire.geog.kcl.ac.uk/index.php/ronan> e <http://www.unidata.ucar.edu>).

A propagação da fronteira da chama (as medidas) foram capturadas usando uma câmera de termografia por infravermelho, em que as observações evoluem com o tempo, como ilustrado na figura 4.9, e a zona de interesse tem a temperatura igual a 600K, como mostra na figura 4.10. Mais detalhes sobre essa técnica para as medidas são vista em WOOSTER *et al* (2005).

Para esse problema, a função de verossimilhança ($\pi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$) dada pela equação (4.17) foi calculada entre a distância entre a fronteira real e a fronteira simulada. Para fazer o cálculo dessa distância foi necessário fazer uma discretização da fronteira simulada. Em seguida, foram selecionados os pontos dessa discretização e por fim feita a correspondência com a fronteira real, de forma que só existisse um único ponto correspondente. Toda essa formulação é vista em DELMOTTE (2011).

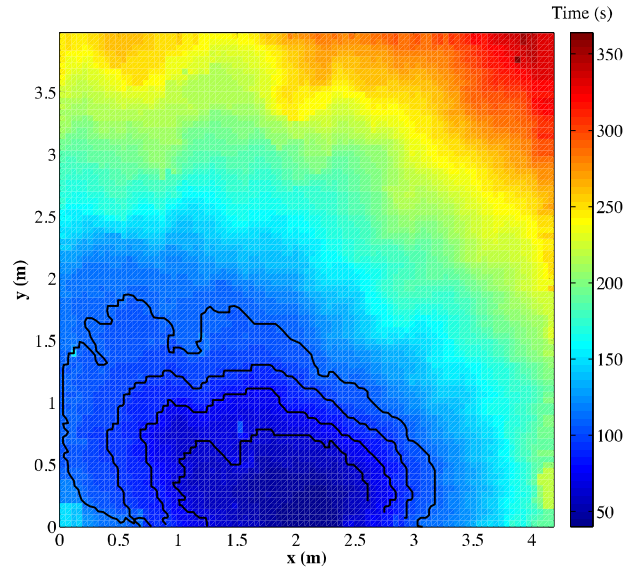


Figura 4.9: Representação da frente da chama dado pelas linhas negras com frequência de 14 s, começando em 64 segundos até 106 segundos.

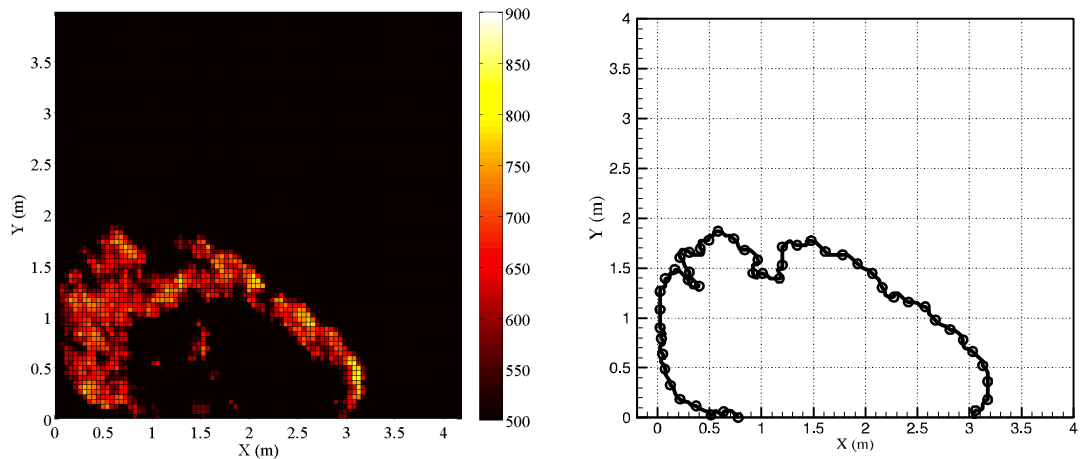


Figura 4.10: Extração da frente da chama (direita) do campo de temperatura (esquerda) em $t = 106s$.

As tabelas 4.8 e 4.9 mostram a adaptação feita para a estimação do filtro SIR e filtro do ASIR para a estimação da velocidade do vento do problema de propagação de incêndio em escalar de laboratório.

A velocidade do vento esta em vermelho, porque essa variável de estado só foi estimada na segunda etapa, ou seja, quando foi utilizada a série de imagens, com uma frequência de tempo de 28 segundos. Na primeira etapa, em que foi usado um intervalo de tempo de 14 segundos, somente a relação área de superfície/volume das partículas e o teor umidade do leito do combustível foram estimados.

Tabela 4.8: Algoritmo do filtro SIR para o problema de incêndio em escala de laboratório.

1. Inicialização
1.1 Faça $k=1$;
1.2 Gere um conjunto de partículas pelo modelo de evolução $\Sigma_k^i = \Sigma(k-1) + \sigma_\Sigma W_\Sigma$ $M_{f_k}^i = M_f(k-1) + \sigma_M W_M$ $V_{vk}^i = V_v(t_{k-1}) + u(t_{k-1}) + \sigma_v W_v$
2. Avaliação dos Pesos
2.1 Calcule os pesos: $w_k^i = \pi\left(\mathbf{z}_k \mid \Sigma_k^i, M_{f_k}^i, V_{vk}^i\right) = (2\pi)^{-U/2} \left \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} \right ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\Sigma_k^i, M_{f_k}^i, V_{vk}^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\Sigma_k^i, M_{f_k}^i, V_{vk}^i)) \right]$
2.2 Normalizem os pesos: $\hat{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^N w_k^i}$
3. Reamostragem ou Seleção
3.1 Reamostragem das partículas são dados abaixo:
3.1.1 Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{w}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
3.1.2 Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
3.1.3 Para $j = 1, \dots, N$, faça:
• Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$.
• Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$.
• Designe as partículas $\Sigma_k^j = \Sigma_k^i, M_{f_k}^j = M_{f_k}^i$ e $V_{vk}^j = V_{vk}^i$
• Designe os pesos para $w_k^j = N^{-1}$.
4. Calculo da Média da posteriori $\Sigma(k) = \sum_{i=1}^N \Sigma_k(i) \cdot \mathbf{w}_k^{(i)}, \quad M_{f_k}(k) = \sum_{i=1}^N M_{f_k}(i) \cdot \mathbf{w}_k^{(i)}$ $V_v(k) = \sum_{i=1}^N V_v(i) \cdot \mathbf{w}_k^{(i)}$
5. Evolução do Modelo

5.3 Faça $k = k + 1$. Se $k = k_{final} + 1$, então pare.
$\Sigma_k^i = \Sigma(k - 1) + \sigma_\Sigma W_\Sigma$ $M_{f_k}^i = M_f(k - 1) + \sigma_M W_M$ $V_{vk}^i = V_v(t_{k-1}) + u(t_{k-1}) + \sigma_v W_v \text{ para } i = 1, \dots, N$
Retorne para passo 2.

Tabela 4.9: Algoritmo do filtro ASIR para o problema de incêndio em escala de laboratório.

1. Inicialização
a. Faça $k=1$;
b. $\mathbf{w}_{k-1}^{(i)} = 1/N$
2. Cálculo da amostra do estado do sistema para a Variável Auxiliar
$\mathbf{u1}_k^i = \Sigma_k^i = \Sigma(k - 1) + \sigma_\Sigma W_\Sigma$ $\mathbf{u2}_k^i = M_{f_k}^i = M_f(k - 1) + \sigma_M W_M$ $\mathbf{u3}_k^i = V_{vk}^i = V_v(t_{k-1}) + u(t_{k-1}) + \sigma_v W_v$
3. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança:
$\mathbf{w}_k^i = \mathbf{w}_{k-1}^i (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{cov}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i, \mathbf{u3}_k^i))^T \mathbf{W}_{cov} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i, \mathbf{u3}_k^i)) \right]$
b. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^i = \frac{\mathbf{w}_k^i}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^i}$
4. Reamostragem ou Seleção
d. Construindo a soma dos pesos acumulativos (CSW), sendo computada por $c_i = c_{i-1} + \hat{\mathbf{w}}_k^i$ para $i = 1, \dots, N$, com $c_0 = 0$.
e. Tome $i = 1$ e gere ζ_1 de uma distribuição uniforme $U[0, N^{-1}]$.
f. Para $j = 1, \dots, N$, faça:
<ul style="list-style-type: none"> • Calcule $\zeta_j = \zeta_1 + N^{-1} (j - 1)$. • Enquanto $\zeta_j > c_i$ faça $i = i + 1$. • Designe as partículas $\mathbf{u1}_k^{\beta^j} = \mathbf{u1}_k^i$, $\mathbf{u2}_k^{\beta^j} = \mathbf{u2}_k^i$ e $\mathbf{u3}_k^{\beta^j} = \mathbf{u3}_k^i$
5. Calculem a função de verossimilhança de:
$\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i, \mathbf{u3}_k^i) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{cov}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i, \mathbf{u3}_k^i))^T \mathbf{W}_{cov} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\mathbf{u1}_k^i, \mathbf{u2}_k^i, \mathbf{u3}_k^i)) \right]$
6. Evolução do Modelo
a. Calcule as partículas:

$\Sigma_k^i = \mathbf{u} \mathbf{l}_k^{\beta^j} + \sigma_\Sigma W_\Sigma$ $M_{f_k}^i = \mathbf{u} \mathbf{2}_k^{\beta^j} + \sigma_M W_M$ $V_{vk}^i = \mathbf{u} \mathbf{3}_k^{\beta^j} + u(t_{k-1}) + \sigma_v W_v \text{ para } i = 1, \dots, N.$
7. Avaliação dos Pesos
a. Calcule a função de verossimilhança
$\pi(\mathbf{z}_k \Sigma_k^i, M_{f_k}^i, V_{vk}^i) = (2\pi)^{-U/2} \mathbf{W}_{\text{cov}}^{-1} ^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\Sigma_k^i, M_{f_k}^i, V_{vk}^i))^T \mathbf{W}_{\text{cov}} (\mathbf{z}_k - \mathbf{T}(\Sigma_k^i, M_{f_k}^i, V_{vk}^i)) \right]$
b. Calcule os novos pesos: $\mathbf{w}_k^i = \frac{\pi(\mathbf{z}_k \Sigma_k^i, M_{f_k}^i, V_{vk}^i)}{\pi(\mathbf{z}_k \mathbf{u} \mathbf{l}_k^{\beta^j}, \mathbf{u} \mathbf{2}_k^{\beta^j}, \mathbf{u} \mathbf{3}_k^{\beta^j})}$
c. Normalize os pesos: $\hat{\mathbf{w}}_k^{(i)} = \frac{\mathbf{w}_k^{(i)}}{\sum_{i=1}^N \mathbf{w}_k^{(i)}}$
8. Calculo da Estimativa do Estado Atual
$\Sigma(k) = \sum_{i=1}^N \Sigma_k(i) \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$ $M_f(k) = \sum_{i=1}^N M_{f_k}(i) \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$ $V_v(k) = \sum_{i=1}^N V_v(i) \cdot \hat{\mathbf{w}}_k^{(i)}$
a. Faça $k = k + 1$, se $k = t_{\text{final}} + 1$, então pare.
Com as novas partículas, retorne ao segundo passo.

Nesse problema $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ são pontos das fronteiras de propagação do incêndio geradas pelo método de Runge-Kutta para a integração no tempo e o método redução de variação total (TVD - total variation diminishing) junto com os limitadores SUPERBEE para a discretização do espaço.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesse capítulo serão apresentados os resultados dos algoritmos dos filtros de partículas descritos no capítulo 3 para os problemas inversos proposto no capítulo 4. Em que, tem-se em primeiro um problema simples a fim de entender e compreender os filtros de partículas. O problema escolhido foi de condução de calor transiente unidimensional, a fim de estimar dois tipos diferentes de fluxo de calor, como mostram a figura 5.1 e a figura 5.2. Em seguida, os filtros de partículas foram aplicados a um problema de solidificação unidimensional em coordenadas cilíndricas, descrito na seção 4.2, com o intuito de estimar a fronteira de solidificação, o campo de temperatura e o fluxo de calor, esse problema tinha como objetivo preparar para o problema de propagação de incêndio. Por fim, os filtros de partículas foram aplicados em um problema de propagação de incêndio, com o objetivo de prever a frente da chama e estimar a velocidade de propagação do fogo e os parâmetros que influenciam nessa propagação.

Os algoritmos dos filtros Bayesianos da classe dos filtros de partículas, a solução numérica do problema de condução de calor e a solução analítica para o problema de solidificação foram implementados em Fortran90 e os resultados foram gerados em um notebook com processador Intel(R) Core (TM) 2 Duo CPU T5550 @1.83GHz . Para a solução dos problemas de propagação do fogo foram utilizados computadores do CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique) devido ao alto custo computacional envolvido.

Para analisar melhor os resultados gerados, foi feito o cálculo do erro quadrático médio (RMS), definido pela equação 5.1. Para todos os problemas escolhidos.

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (X_m(j) - X_o(j))^2} \quad (5.1)$$

onde X_m representa as variáveis de estados encontrada pelo filtros de partículas, X_o representa os valores exatos e M é o total de pontos.

O intervalo de 99% de confiança mostrado pela equação 5.3 também foi utilizado para ajudar na avaliação dos resultados gerados.

$$I_{99\%} = \mathbf{x}_t \pm 2.576\sigma_x \quad (5.2)$$

onde \mathbf{x}_t é a variável de estado estimada e σ_x é o desvio padrão da população de partículas geradas.

5.1 Resultados do problema inverso de condução de calor

Para esse problema, foi utilizado o método numérico das diferenças finitas, com uma malha de 121 nós, para obter as medidas simuladas. Tais medidas foram acrescentadas um ruído de 5% da temperatura máxima obtida, como descrito na secção 4.12. Para a estimação dos dois tipos de fluxos de calor mostrados nas figuras 5.1 e 5.2, com os filtros de partículas SIR, ASIR, Monte Carlo com Amostragem Sequencial e Monte Carlo Sequencial sem o cálculo da função de verossimilhança, foi usado o método numérico das diferenças finitas para o modelo de evolução de estado. Porém, foi usada uma malha de 21 nós, a fim de evitar o crime inverso.

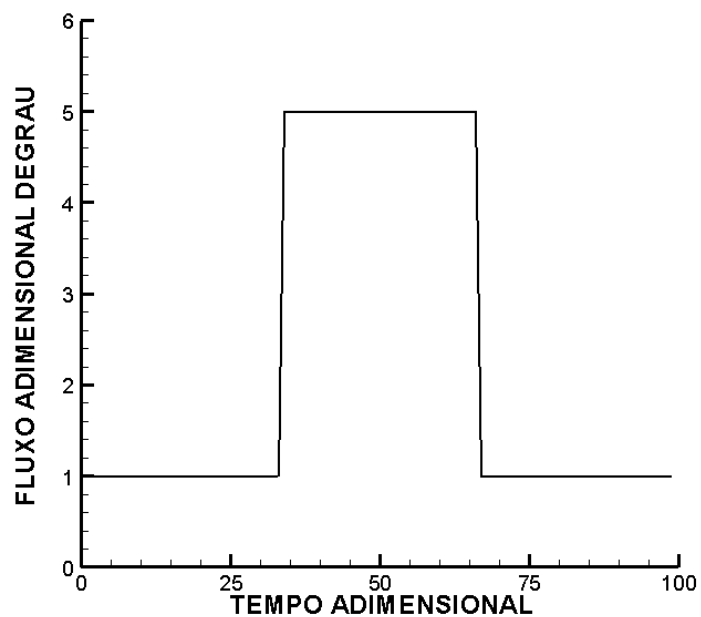


Figura 5.1: Fluxo de Calor degrau.

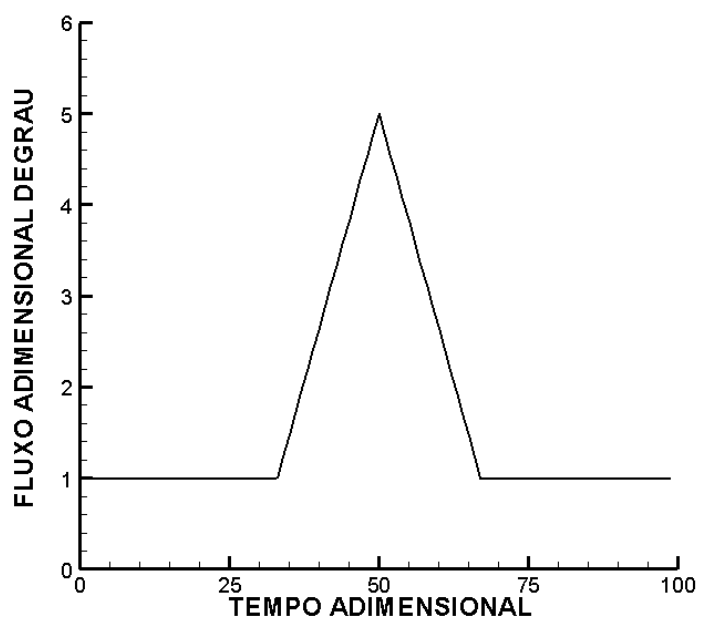


Figura 5.2: Fluxo de Calor triangular

A tabela 5.1 mostra os resultados gerados pelos filtros de partículas para a estimação dos dois fluxos de calor estudados. Nota-se que o filtro SIR apresentou um baixo custo computacional para a realização da tarefa de estimar os dois fluxos de calor,

se comparado com o filtro ASIR. Entretanto, o filtro ASIR apresentou os melhores resultados para todos os casos testados e com um número menor de partículas. Observa-se também que o filtro SIR, com um desvio padrão (DP) igual a 1 para o fluxo de calor, apresenta o menor erro quadrático médio entre todos os DP utilizados. Já o filtro ASIR com um desvio padrão igual 0.3 tem um desempenho bem próximo do melhor resultado do filtro SIR. Os filtros Monte Carlo com Amostragem Sequencial e Monte Carlo Sequencial sem o cálculo da função de verossimilhança obtiveram os piores resultados e os maiores tempos computacionais de acordo com a tabela 5.1.

Tabela 5.1: Resultado para o Fluxo Degrau

Filtro Bayesiano	Número de Partículas	Desvio padrão do modelo de evolução	Erro RMS	Tempo Computacional
SIR	100	0.3	0.843963	1.197E-02 min.
SIR	500	0.3	0.779834	6.250E-02 min.
SIR	1000	0.3	0.73567	0.1343 min.
SIR	5000	0.3	0.718242	1.3544 min.
ASIR	100	0.3	0.7674	2.39E-02 min.
ASIR	500	0.3	0.701541	0.1325 min.
ASIR	1000	0.3	0.693654	0.306 min.
ASIR	5000	0.3	0.637171	16.04 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	500	0.3	1.402	0.5185 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	1000	0.3	1.395	1.292 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	5000	0.3	1.397	14.06 min.
SMC sem o cálculo da função de	500	0.3	0.715	3.555 min.

verossimilhança				
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	1000	0.3	0.673	7.46 min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	5000	0.3	0.701	37.86 min.
Filtro Bayesiano	Número de Partículas	Desvio padrão do modelo de evolução	Erro RMS	Tempo Computacional
SIR	100	0.5	0.667449	1.276E-02 min.
SIR	500	0.5	0.649834	6.171E-02 min.
SIR	1000	0.5	0.683231	0.1361 min.
SIR	5000	0.5	0.661722	1.2591 min.
ASIR	100	0.5	0.656465	2.291E-02 min.
ASIR	500	0.5	0.649833	0.134895 min.
ASIR	1000	0.5	0.650926	0.309375 min.
ASIR	5000	0.5	0.588289	19.44557 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	500	0.5	1.083	0.535 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	1000	0.5	1.068	1.354 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	5000	0.5	1.061	15.26 min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	500	0.5	0.635	2.123 min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	1000	0.5	0.685	5.316 min.
SMC sem o cálculo da	5000	0.5	0.651	15.26 min.

função de verossimilhança				
Filtro Bayesiano	Número de Partículas	Desvio padrão do modelo de evolução	Erro RMS	Tempo Computacional
SIR	100	1.0	0.649331	1.197E-02 min.
SIR	500	1.0	0.645967	6.250E-02 min.
SIR	1000	1.0	0.62626	0.134375 min.
SIR	5000	1.0	0.631601	1.354427 min.
ASIR	100	1.0	0.620894	1.197E-02 min.
ASIR	500	1.0	0.644469	6.250E-02 min.
ASIR	1000	1.0	0.600563	0.134375 min.
ASIR	5000	1.0	0.598871	1.354427 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	500	1.0	0.732	0.792 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	1000	1.0	0.747	1.424 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	5000	1.0	0.737	16.06 min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	500	1.0	0.750	0.822 min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	1000	1.0	0.748	1.958 min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	5000	1.0	0.730	9.448 min.

As figuras 5.3 e 5.4 a estimativa do fluxo de calor na forma de uma função degrau com o filtro SIR. A figura 5.3 mostra o melhor resultado (menor RMS) em

função do número de partículas, para cada desvio padrão testado. Essa figura deixa claro que o método consegue acompanhar o fluxo degrau exato, mesmo ele apresentando duas descontinuidades. A figura 5.4 apresenta o resultado do filtro SIR com o menor erro quadrático médio e seu intervalo de 99% de confiança. Essa figura expõe que o filtro SIR não consegue capturar todos os valores exatos da função dentro do seu intervalo de confiança.

Agora analisando as figuras 5.5 e 5.6, na qual se tem os resultados obtidos com o método ASIR com 5000 partículas, nota-se que este filtro apresenta uma melhor aproximação para o fluxo degrau, quando comparado ao filtro SIR (ver figuras 5.3 e 5.4). Tal fato já era esperado pela análise dos erros quadráticos médios. Examinando a figura 5.16 tem-se o gráfico do resultado do filtro ASIR com seu intervalo de 99% de confiança, na qual mostra que esse filtro consegue capturar praticamente todos os valores exatos do fluxo de calor em análise, pois esse método tem um maior intervalo de confiança.

As figuras 5.7, 5.8, 5.9 e 5.10 apresentam os resultados gerados pelo o filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial e pelo filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança. Essas figuras realçam os dados da tabela 5.1, em que é evidente a dificuldade desses métodos em estimar o fluxo de calor degrau.

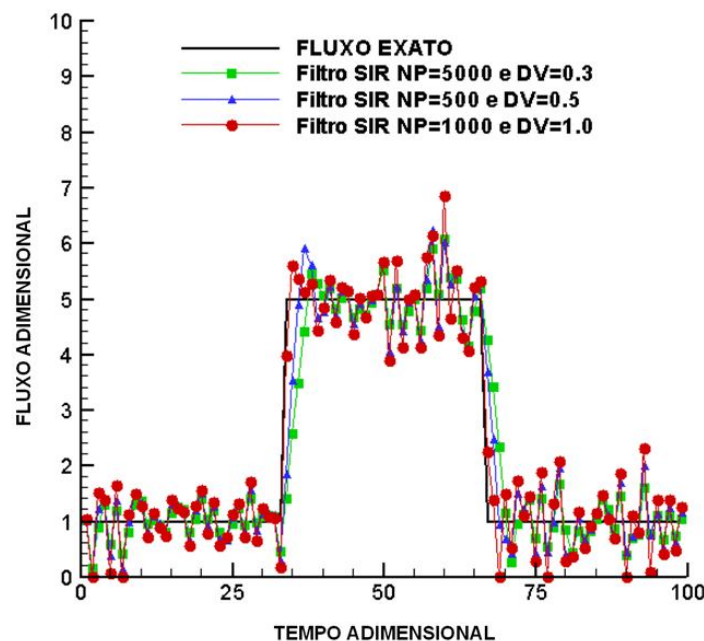


Figura 5.3: Resultado Resultado do Filtro SIR para o Fluxo Degrau.

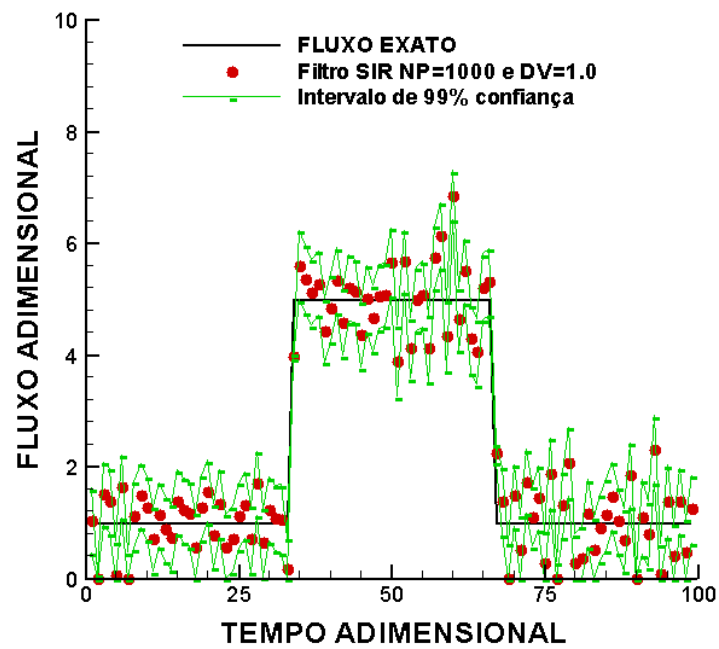


Figura 5.4: Melhor Resultado do filtro SIR com o Intervalo de 99% de confiança.

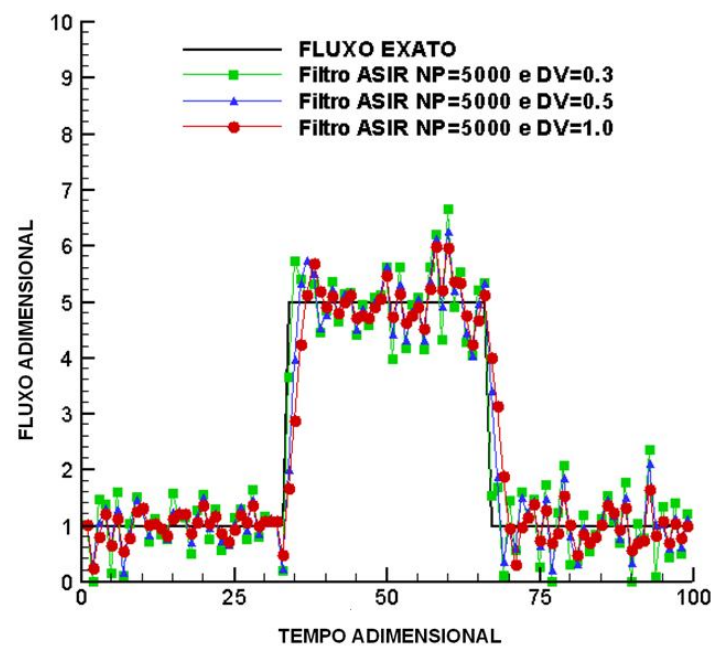


Figura 5.5: Resultado do Filtro ASIR para o Fluxo Degrau.

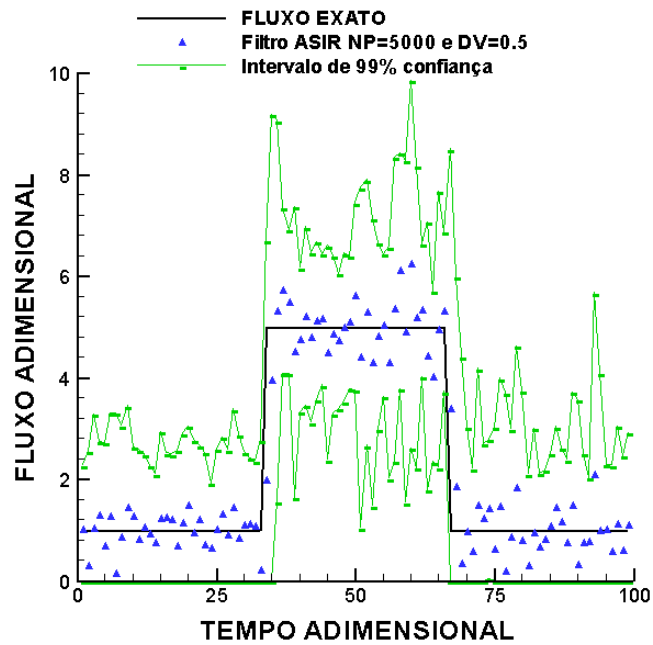


Figura 5.6: Resultado do filtro ASIR com o Intervalo de 99% de confiança.

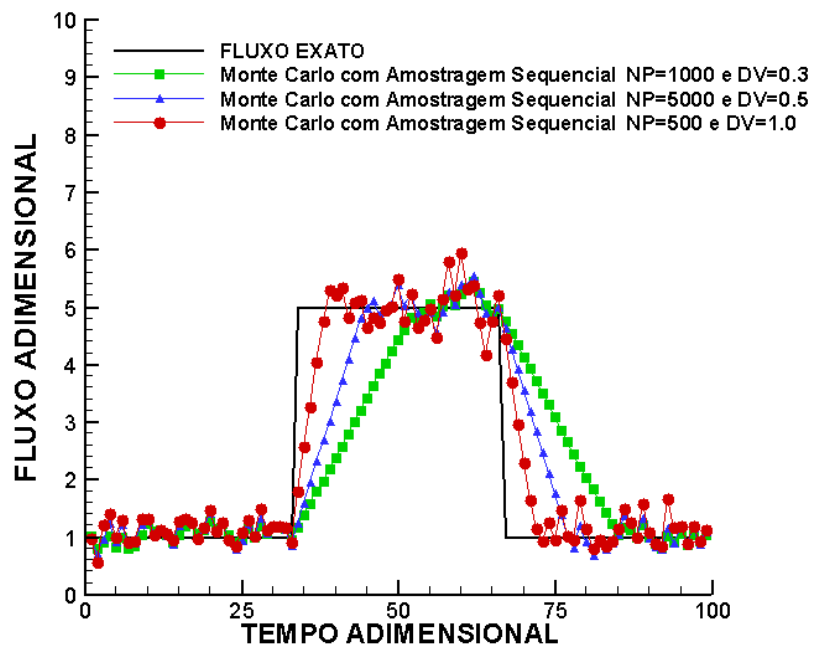


Figura 5.7: Resultado do Filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial para o Fluxo Degrau.

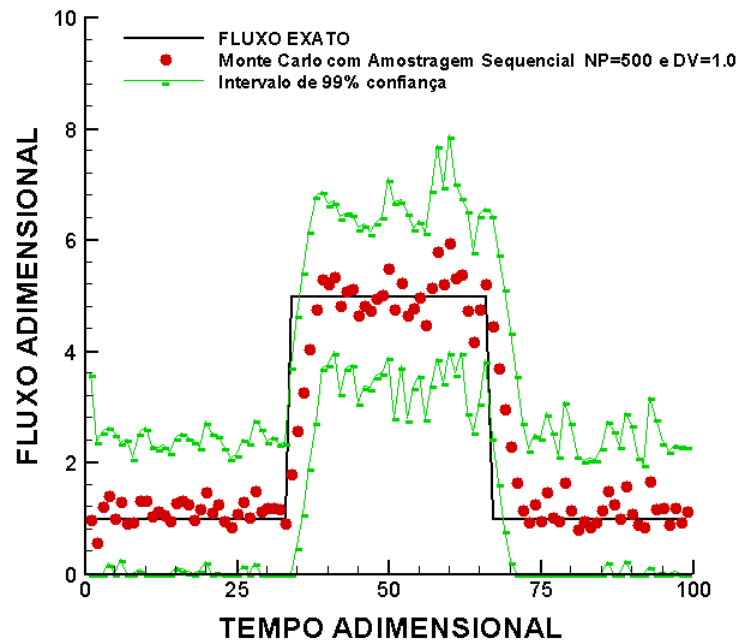


Figura 5.8: Resultado do Filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial com o Intervalo de 99% de confiança.

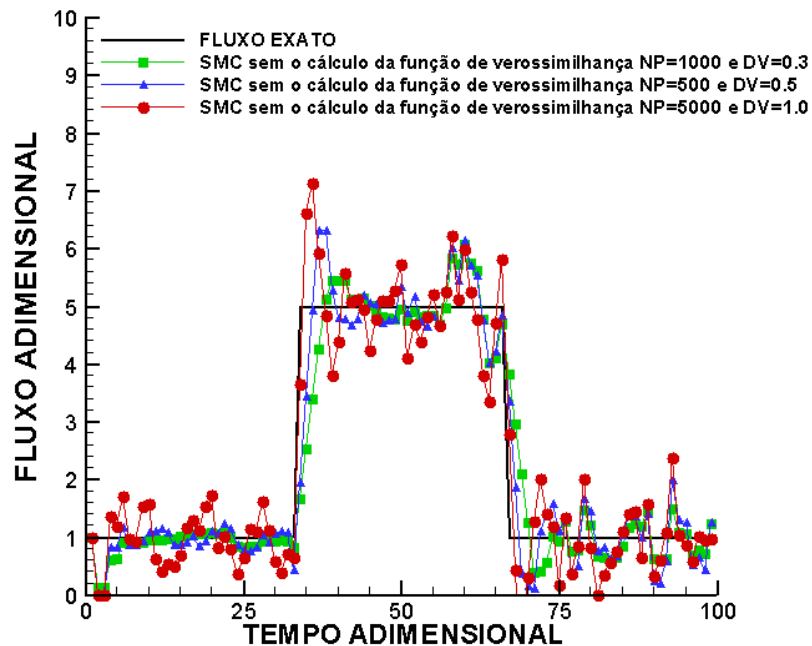


Figura 5.9: Resultado do Filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança para o Fluxo Degrau.

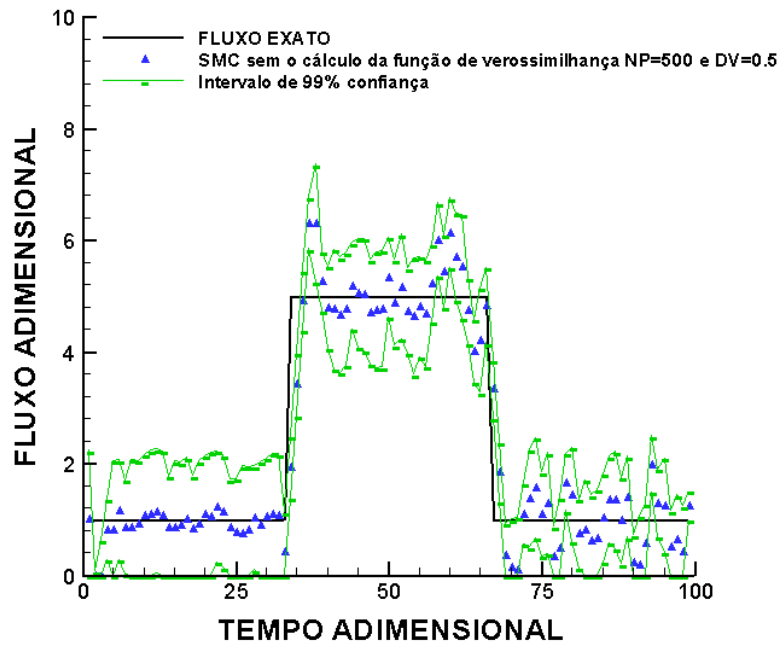


Figura 5.10: Resultado do Filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança com o Intervalo de 99% de confiança.

O desempenho do filtro SIR e do filtro ASIR, para o fluxo triangular, é apresentado na tabela 5.2. Essa tabela mostra que o desempenho dos dois filtros de partículas são bem próximos. Isso fica mais evidente quando o desvio padrão do modelo de evolução é maior. Outro fato interessante a se destacar para esse fluxo é que com o menor valor imposto para o desvio padrão do modelo de evolução tem-se os melhores resultados, diferente do fluxo degrau que precisou do maior valor para o desvio padrão do modelo de evolução. Para o fluxo triangular todos os dois filtros apresentam bons resultados, mesmo com apenas 100 partículas. Mas para esse tipo de fluxo, o filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial apresentou o menor erro RMS, bem diferente do fluxo degrau, em que esse método apresentou o maior erro RMS e o filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança também apresentou um bom resultado.

As figuras 5.11 e 5.12 mostram o desempenho do filtro SIR na estimativa do fluxo triangular. A figura 5.11 mostra o melhor resultado obtido cada desvio padrão testado. Essa figura demonstra que o método consegue acompanhar o fluxo triangular exato. A figura 5.12 apresenta o resultado do filtro com o menor erro quadrático médio e seu intervalo de 99% de confiança. Baseando nessa figura tem-se que o filtro SIR

consegue capturar todos os valores exatos da função dentro do seu intervalo de confiança.

Agora analisando as figuras 5.13 e 5.14, na qual se tem o desempenho do filtro ASIR, nota-se que esse método também apresenta uma ótima aproximação para o fluxo triangular. Fato já esperado, pois esse método apresenta o menor erro quadrático médio. A figura 5.14 apresenta o resultado do filtro ASIR com intervalo de 99% de confiança, e qual mostra que esse filtro também consegue capturar todos os valores exatos da função.

Para esse tipo de fluxo o filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial e o filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança apresentaram bons resultados como mostram as figuras 5.15 a 5.18, diferente do fluxo degrau, em que esses métodos apresentaram os piores resultados.

Tabela 5.2: Resultado para o Fluxo Triangular

Filtro Bayesiano	Número de Partículas	Desvio padrão do modelo de evolução	Erro RMS	Tempo Computacional
SIR	100	0.3	0.294337	1.197E-02 min.
SIR	500	0.3	0.301603	6.250E-02 min.
SIR	1000	0.3	0.304654	0.13437 min.
SIR	5000	0.3	0.310087	1.354427 min.
ASIR	100	0.3	0.280583	2.395E-02 min.
ASIR	500	0.3	0.285476	0.132552 min.
ASIR	1000	0.3	0.29808	0.30625 min.
ASIR	5000	0.3	0.292491	16.0450 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	500	0.3	0.408	0.532 Min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	1000	0.3	0.422	1.210 Min.
Monte Carlo com Amostragem	5000	0.3	0.423	11.921 Min.

Sequencial				
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	500	0.3	0.292	0.7812 Min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	1000	0.3	0.264	1.275 Min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	5000	0.3	0.259	6.149 Min.
Filtro Bayesiano	Número de Partículas	Desvio padrão do modelo de evolução	Erro RMS	Tempo Computacional
SIR	100	0.5	0.361998	1.276E-02 min.
SIR	500	0.5	0.381834	6.171E-02 min.
SIR	1000	0.5	0.382347	0.1361 min.
SIR	5000	0.5	0.378645	1.2591 min.
ASIR	100	0.5	0.362865	2.291E-02 min.
ASIR	500	0.5	0.385825	0.134895 min.
ASIR	1000	0.5	0.380947	0.309375 min.
ASIR	5000	0.5	0.373809	19.44557 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	500	0.5	0.248	0.524 Min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	1000	0.5	0.251	1.1054 Min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	5000	0.5	0.250	11.949 Min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	500	0.5	0.332	0.396 Min.

SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	1000	0.5	0.348	0.782 Min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	5000	0.5	0.355	3.147 Min.
Filtro Bayesiano	Número de Partículas	Desvio padrão do modelo de evolução	Erro RMS	Tempo Computacional
SIR	100	1.0	0.430128	1.276E-02 min.
SIR	500	1.0	0.434715	6.171E-02 min.
SIR	1000	1.0	0.436717	0.1361 min.
SIR	5000	1.0	0.436504	1.2591 min.
ASIR	100	1.0	0.443002	2.291E-02 min.
ASIR	500	1.0	0.437414	0.134895 min.
ASIR	1000	1.0	0.436671	0.309375 min.
ASIR	5000	1.0	0.430333	16.44557 min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	500	1.0	0.269	0.526 Min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	1000	1.0	0.267	1.116 Min.
Monte Carlo com Amostragem Sequencial	5000	1.0	0.268	11.573 Min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	500	1.0	0.540	0.245 Min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	1000	1.0	0.496	0.538 Min.
SMC sem o cálculo da função de verossimilhança	5000	1.0	0.476	2.771 Min.

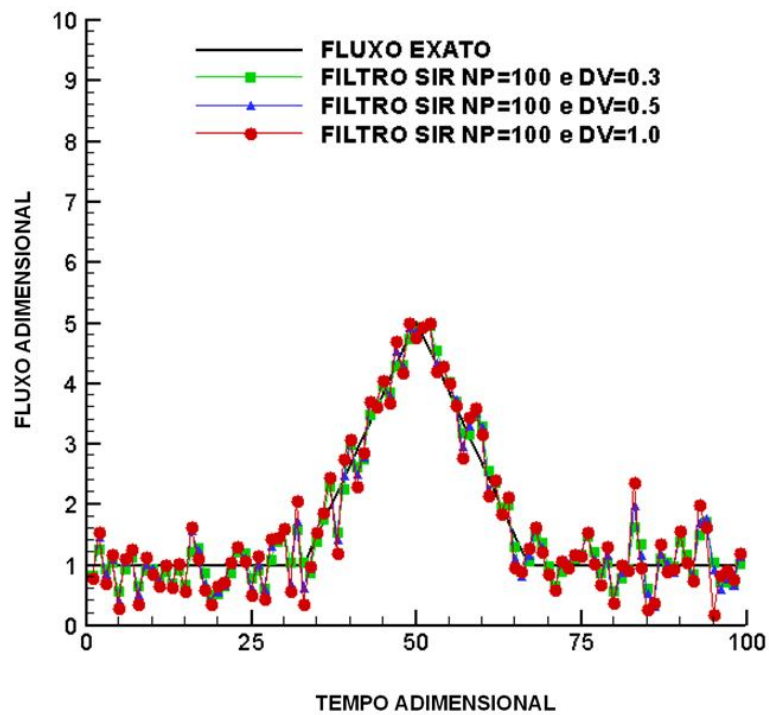


Figura 5.11: Resultado do Filtro SIR para o Fluxo Triangular.

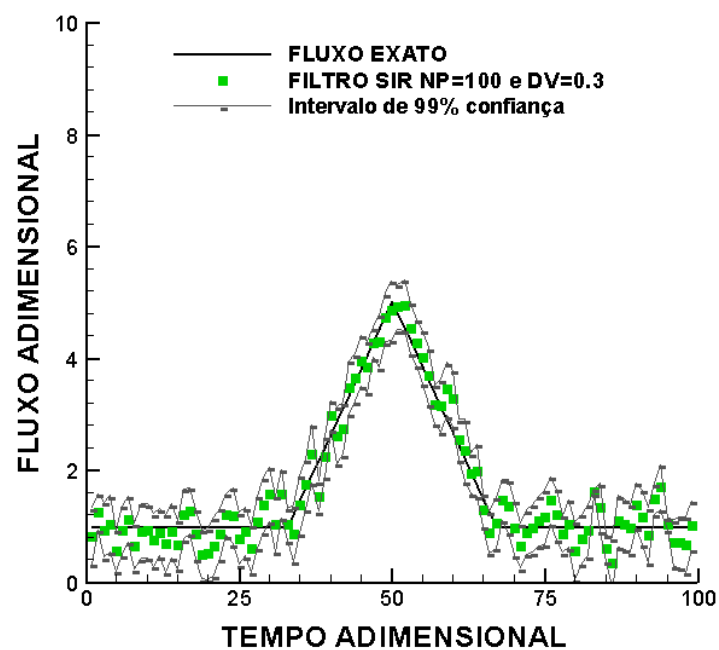


Figura 5.12: Melhor Resultado do filtro SIR com o Intervalo de 99% de confiança.

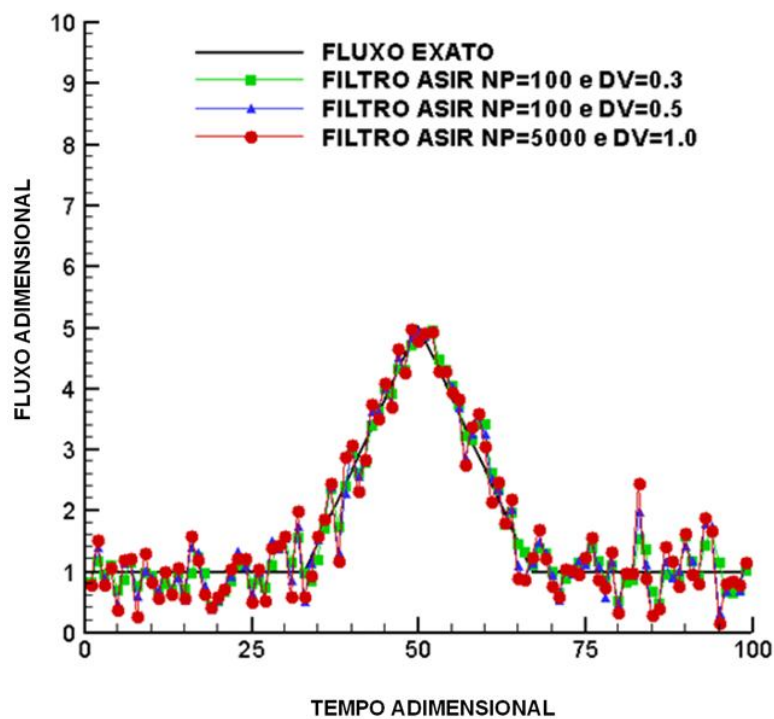


Figura 5.13: Resultado do Filtro ASIR para o Fluxo Triangular.

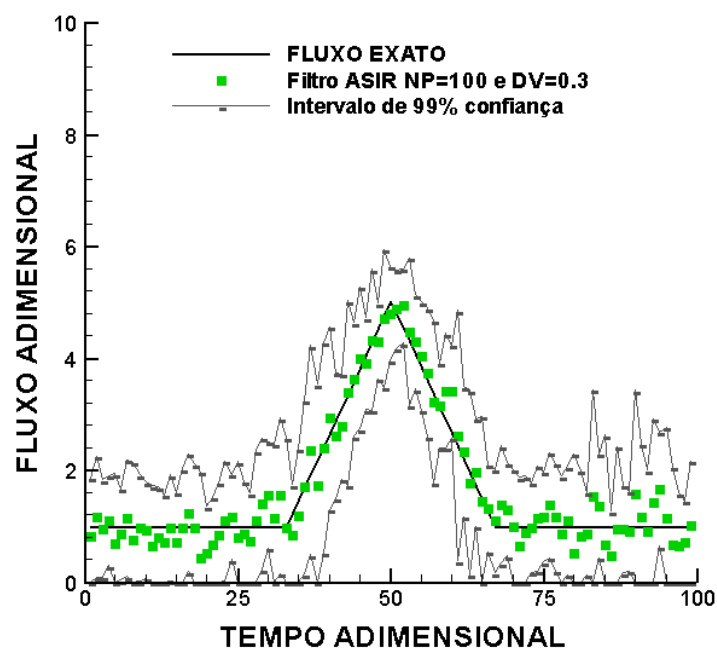


Figura 5.14: Resultado do filtro ASIR com o Intervalo de 99% de confiança.

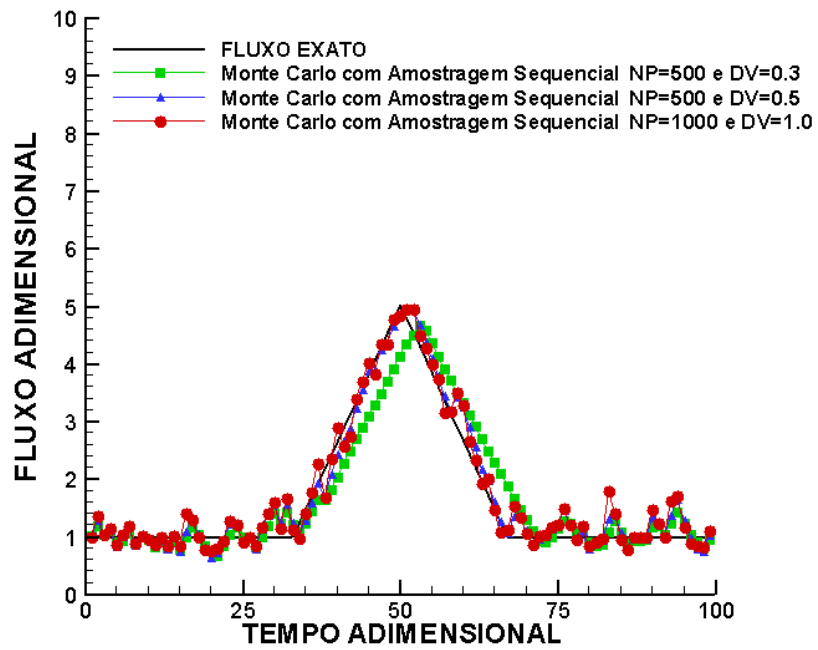


Figura 5.15: Resultado do Filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial para o Fluxo Triangular

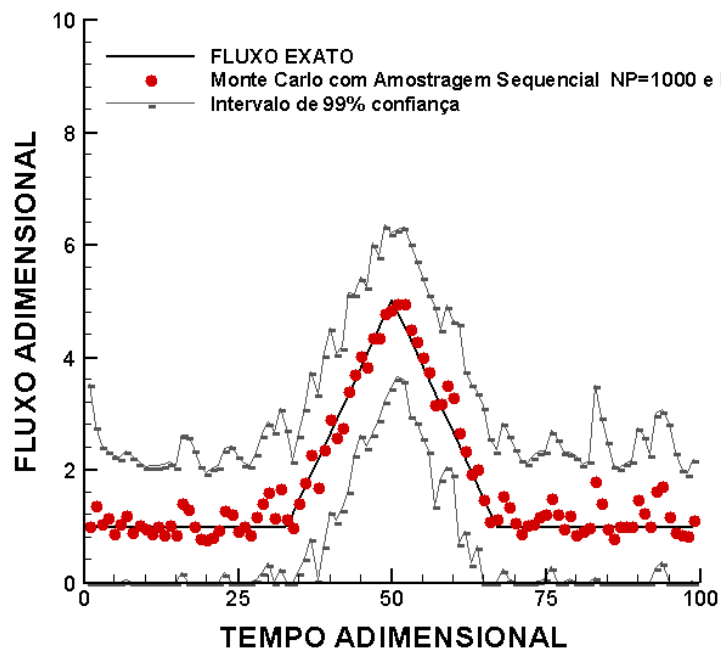


Figura 5.16: Melhor Resultado do filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial com o Intervalo de 99% de confiança.

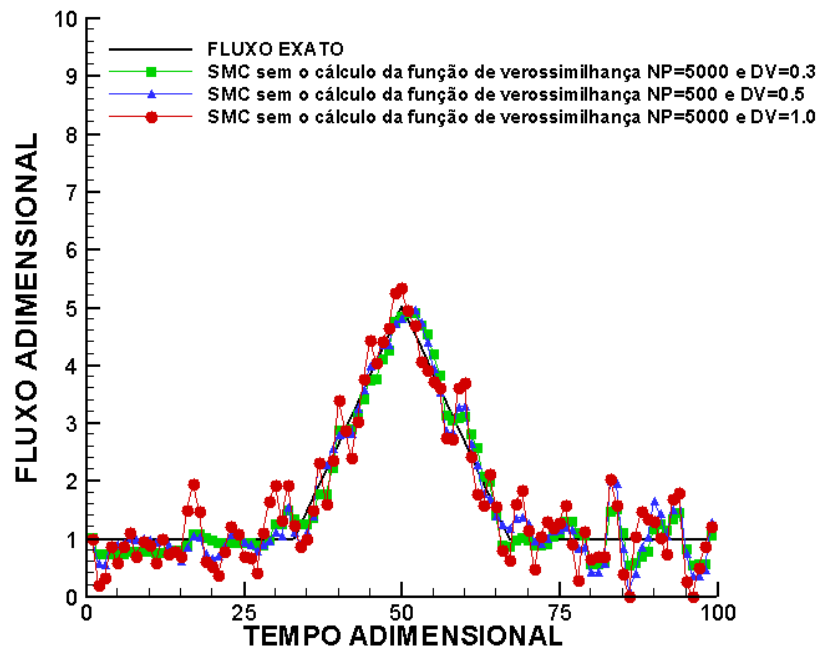


Figura 5.17: Resultado do Filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança para o Fluxo Triangular.

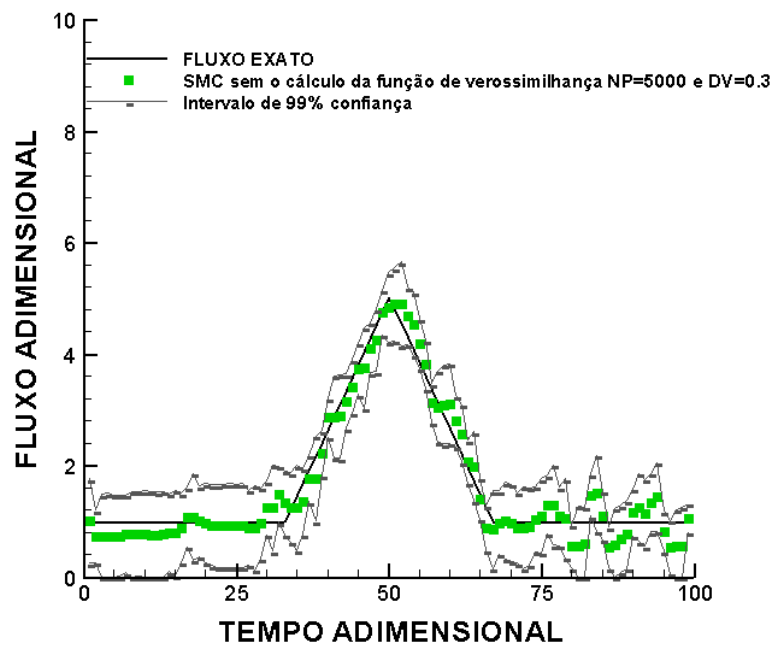


Figura 5.18: Melhor Resultado do filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança com o Intervalo de 99% de confiança.

Pode-se concluir nesse primeiro caso testado que o filtro ASIR tem um melhor desempenho no caso e da função apresentado descontinuidades. Porém, no caso, onde

tem-se um fluxo triangular, os resultados obtidos com os dois filtros são equivalentes.

O filtro Monte Carlo com Amostragem Sequencial e o filtro SMC sem o cálculo da função de verossimilhança apresentaram diferentes desempenho para os dois tipos de filtros, isso mostrou que esses métodos ainda precisam ser compreendidos, isto é, precisam ser mais bem estudados. Por isso, eles não foram empregados nos próximos problemas.

5.2 Resultados do Problema Inverso de solidificação

Nesta seção apresentam-se os resultados obtidos para as estimações da fronteira de solidificação, fluxo de calor e para o campo de temperaturas, para um problema de solidificação em coordenadas cilíndricas, descrito na secção 4.2.1.

A figura 5.19 mostra a temperatura medida na posição $r=0.01$ m sem ruído. Por outro lado, as medidas foram simuladas com ruído Gaussiano, aditivo, com média zero e desvio padrão de 5% da temperatura ambiente da água, como mostra a figura 5.20.

Neste problema foi utilizado $T_i = 25^\circ\text{C}$, $T_m = 0^\circ\text{C}$, $\alpha_s = 0.00118 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $\alpha_l = 0.000146 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$,

$k_s = 2.22 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$, $k_l = 0.61 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}}$, $\rho = 997.1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, que corresponde à água.

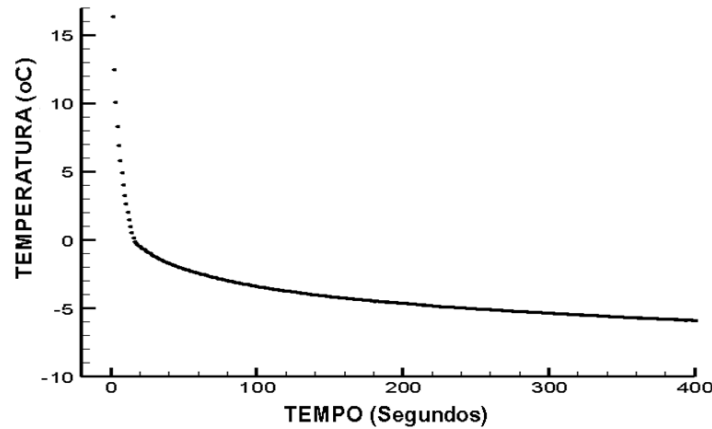


Figura 5.19: Temperatura medida sem ruído.

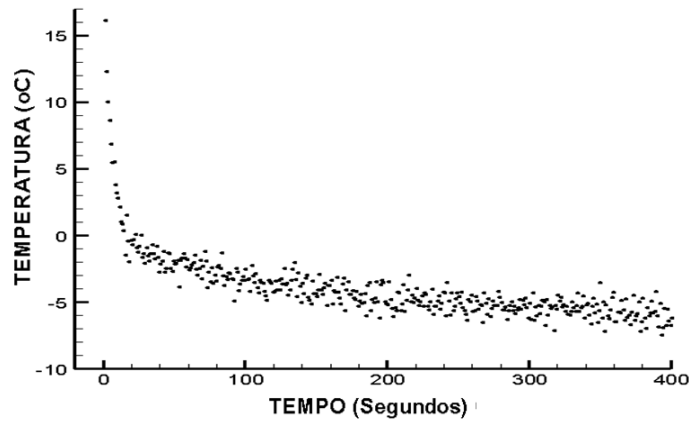


Figura 5.20: Temperatura medida com ruído.

A tabela 5.3, apresenta os erros RMS (o cálculo do erro quadrático médio) para a fronteira de solidificação e para o sorvedouro de calor e o tempo computacional utilizado, em relação a variação do número de partículas, para os filtros SIR e ASIR. Observando essa tabela, fica evidente que o filtro ASIR apresenta o melhor desempenho. Nota-se o filtro SIR com um número 50 vezes maior de partículas do que o filtro ASIR, não resulta em um erro quadrático médio menor.

Tabela 5.3: Resultados do problema de solidificação

Filtro bayesiano	Número de Partículas (NP)	Tempo Computacional	Erro RMS para a fronteira de solidificação (m)	Erro RMS para o fluxo de calor (W/m)
SIR	100	0.008 min.	9×10^{-3}	1.55
SIR	1000	0.997 min.	2×10^{-3}	1.78
SIR	5000	11.047 min.	1×10^{-4}	0.34
ASIR	100	0.161 min.	7.9×10^{-5}	0.15

As figuras 5.21 a 5.26 mostram os resultados obtidos. A figura 5.21 apresenta os resultados para a estimação da fronteira de solidificação, com o filtro SIR no qual foram usadas 5000 partículas, enquanto que o filtro ASIR requer apenas 100 partículas para apresentar um bom resultado. As figuras 5.22 e 5.23 apresentam os resultados do filtro SIR com 5000 partículas e seu intervalo de 99% de confiança e o resultado do filtro ASIR com 100 partículas e seu intervalo de 99% de confiança, respectivamente. Essas

duas figuras mostram que os dois métodos apresentam uma boa estimativa, embora o filtro SIR requiera um número muito maior de partículas.

Já a figura 5.24 apresenta o desempenho dos métodos para a estimação do fluxo de calor. Nessa figura fica mais evidente que o filtro ASIR tem resultados bem mais estáveis e próximos do fluxo exato, do que os resultados apresentados pelo filtro SIR. Tal fato também fica claro com a análise das figuras 5.25 e 5.26, nas quais tem-se o melhor resultado do filtro SIR com seu intervalo de 99% de confiança e o resultado do filtro ASIR com seu intervalo de 99% de confiança, respectivamente. A figura 5.25 mostra a dificuldade do filtro SIR em acompanhar o fluxo de calor exato, mesmo ele sendo um valor constante. Já o filtro ASIR, como mostra a figura 5.26, tem resultados bem consistentes e precisos para esse parâmetro.

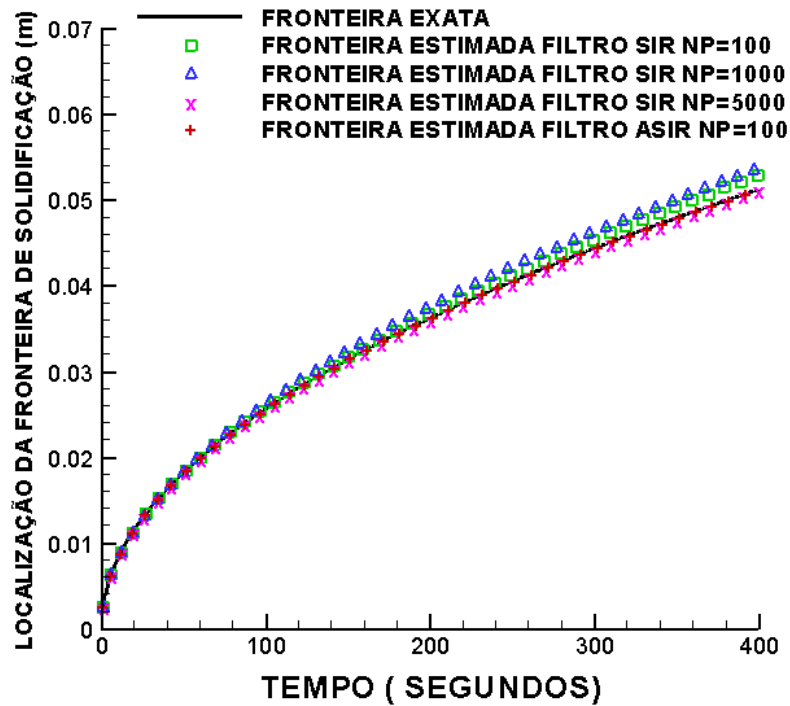


Figura 5.21: Estimação da Fronteira de Solidificação.

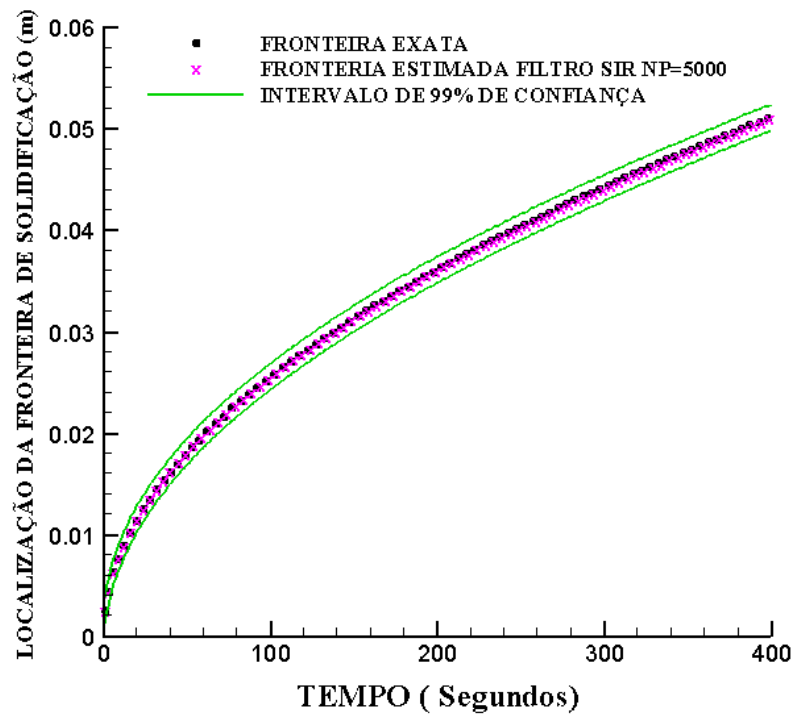


Figura 5.22: Resultado do filtro SIR para a fronteira de solidificação.

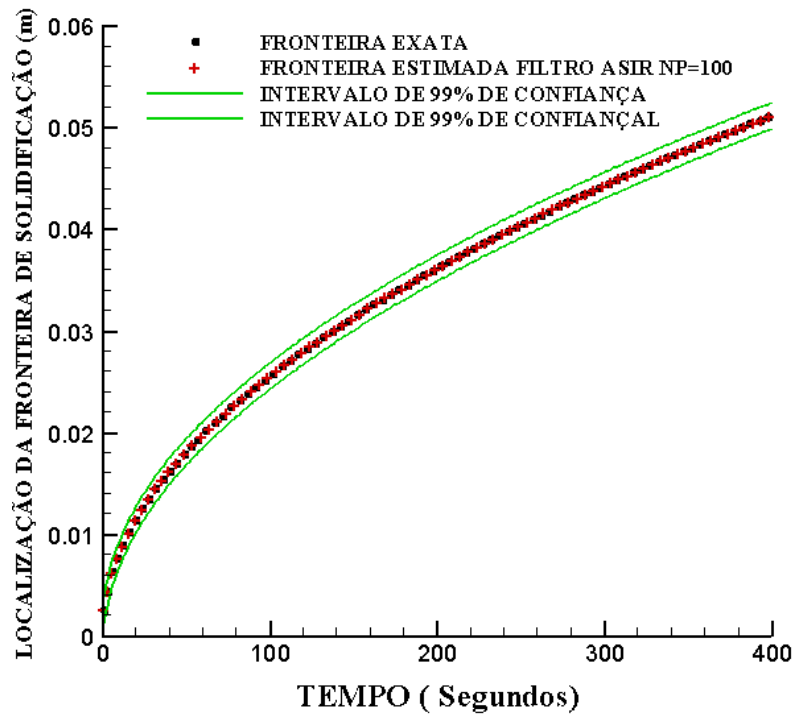


Figura 5.23: Resultado do filtro ASIR para a fronteira de solidificação.

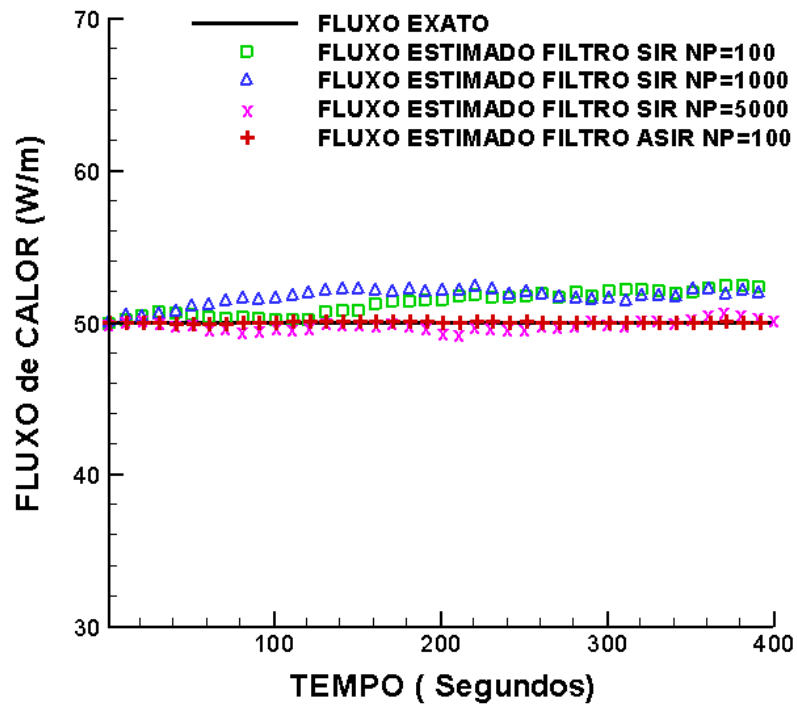


Figura 5.24: Estimação do Fluxo de Calor.

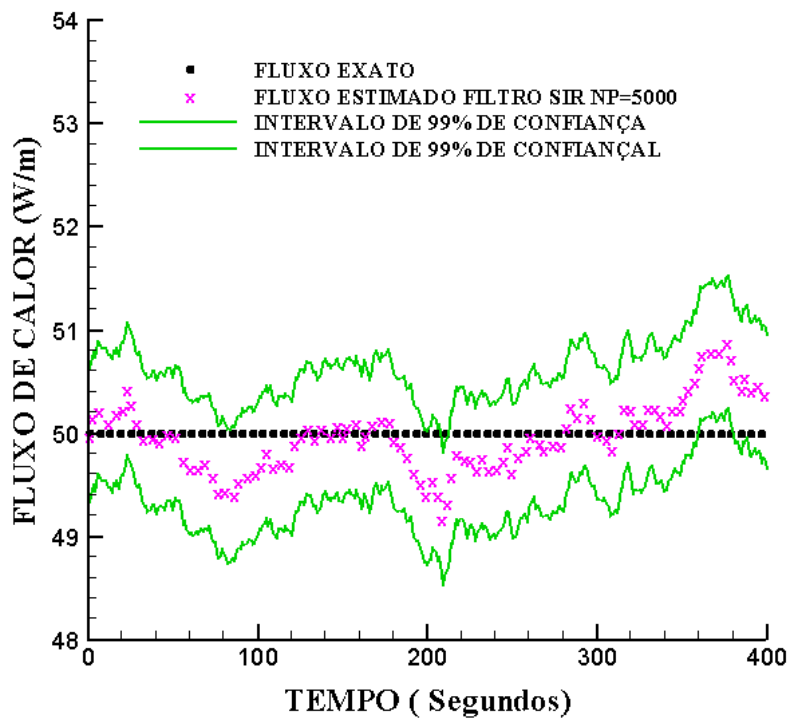


Figura 5.25: Resultado do filtro SIR para o fluxo de calor.

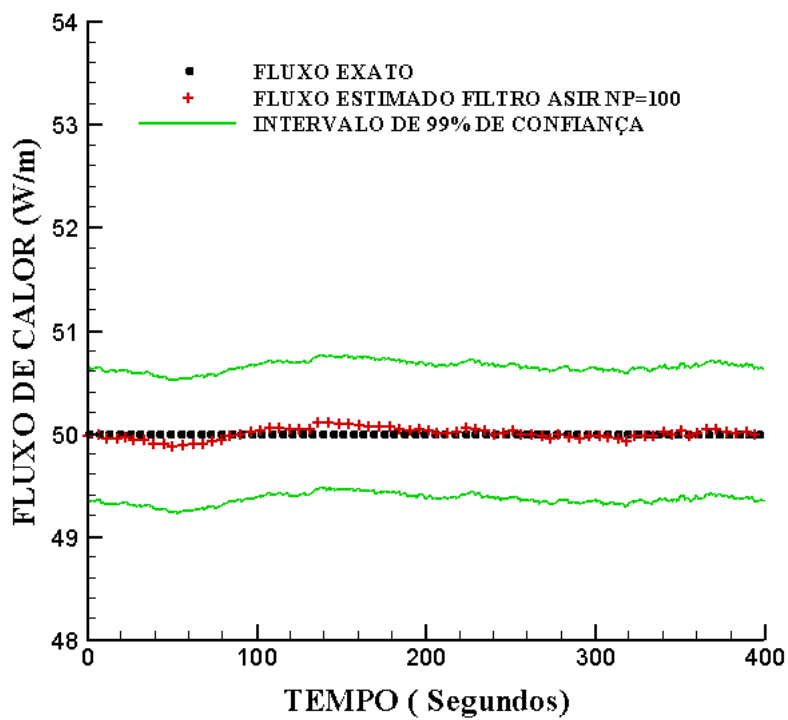


Figura 5.26: Resultado do filtro ASIR para o fluxo de calor.

As figuras 5.27 a 5.29 apresenta a recuperação do campo de temperatura pelo filtro ASIR, para diferentes tempos. Os resultados obtidos são excelentes, mesmo para tempos bem pequenos, próximos ao início do processo de solidificação.

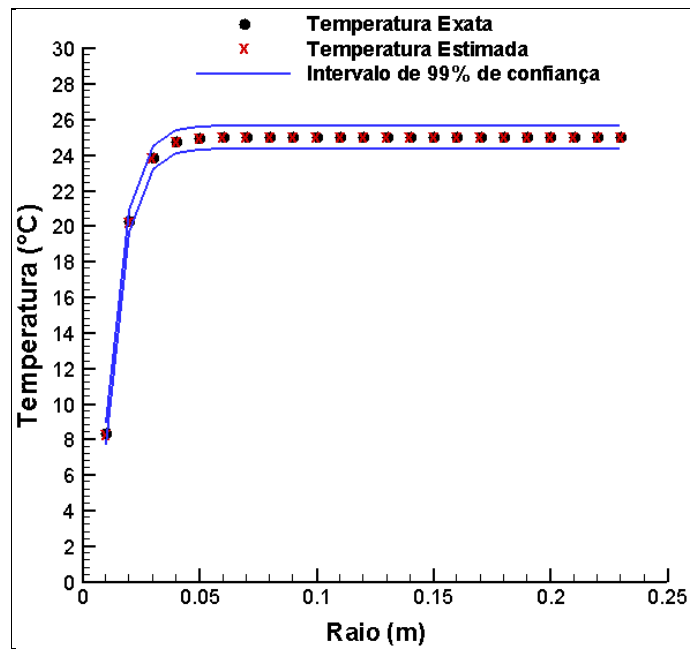


Figura 5.27: Estimação do Campo de Temperatura para tempo=1 segundo.

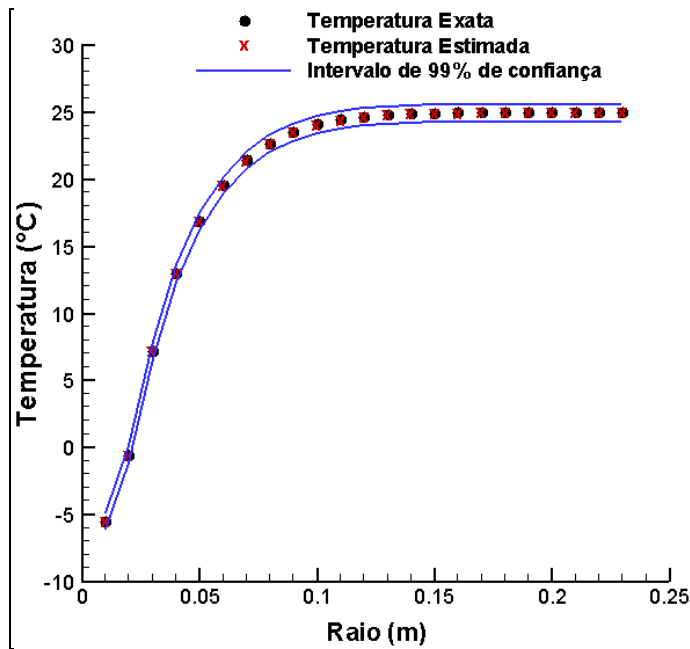


Figura 5.28: Estimação do Campo de Temperatura para tempo=10 segundos.

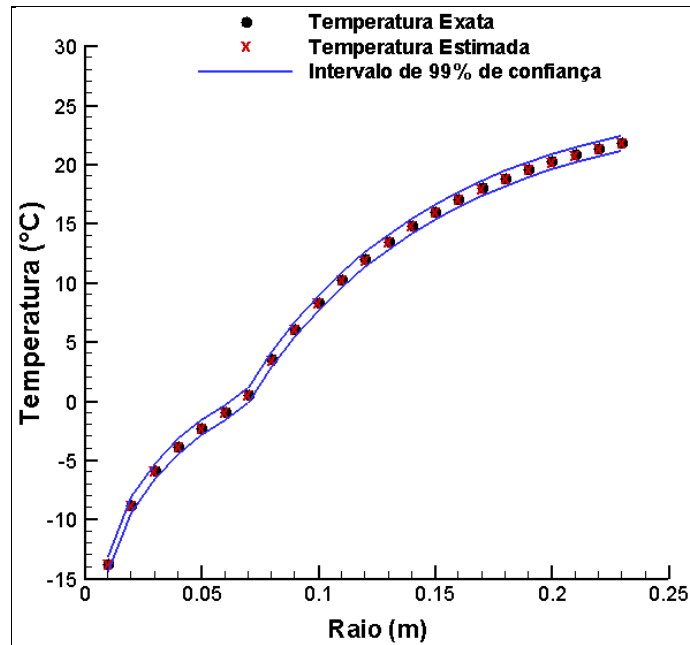
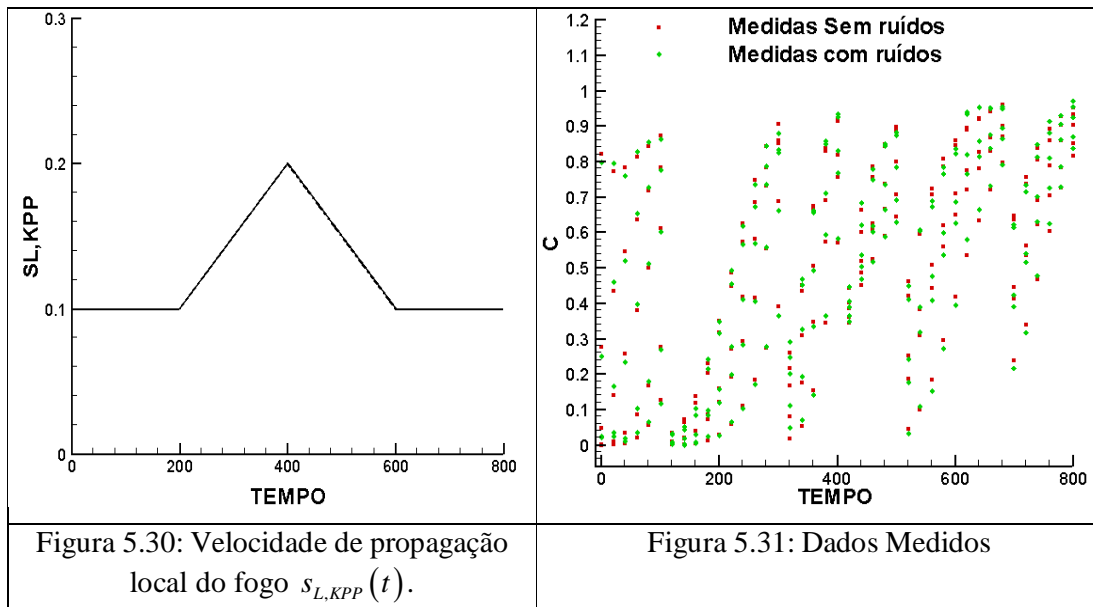


Figura 5.29: Estimação do Campo de Temperatura para tempo=100 segundos.

Conclui-se com os resultados obtidos nesse segundo problema que o filtro ASIR utiliza um conjunto bem menor de partículas e com um custo menor computacionalmente, e ainda apresenta resultados com uma maior precisão, quando comparado ao filtro SIR.

5.3 Resultados do Problema Inverso de Propagação de Incêndio em um Campo

Para esse problema foi proposto estimar a taxa de propagação da chama, apresentada pela figura 5.30 e toda a variável de progresso, todos os detalhes dessa tarefa é visto na secção 4.3.2. A figura 5.31 apresenta as medidas utilizadas para a estimação.



A tabela 5.4 apresenta as performances dos filtros de partículas SIR e ASIR. Para o filtro SIR tem-se variação de aproximadamente 0.001 para os erros RMS utilizando 100 ou 500 partículas e um aumento proporcional ao tempo de execução entre esses dois números de partículas utilizados. Já o filtro ASIR com 100 partículas apresentou o menor erro RMS e o menor tempo computacional.

Tabela 5.4: Resultados dos filtros SIR e ASIR : Erros RMS e tempo CPU

Filtro	Nº de partículas	RMS (m/s)	Tempo CPU
SIR	100	0.012217	110.45 Min.
SIR	500	0.011215	550.96 Min.
ASIR	100	0.010039	106.20 Min.

As figuras 5.32 a 5.35 mostram o desempenho dos filtros de partículas. A figura 5.32 apresenta a comparação do filtro SIR com 100 e 500 partículas e do filtro ASIR com 100 partículas. Nota-se que em todos os casos foi obtida uma boa aproximação para a estimativa da taxa de propagação. Quando é analisada a figura 5.33 e a figura 5.34, que apresentam os resultados dos filtros SIR com 100 e 500 partículas e seus intervalos de 99% de confiança, respectivamente, nota-se que não tem-se um intervalo de confiança, mas sim uma linha. Isto é causado pela perda de diversidade resultante da

reamostragem. Examinando-se agora a figura 5.35, que apresenta o resultado do filtro ASIR com 100 partículas e seu intervalo de 99% confiança, nota-se uma maior diversidade da amostra.

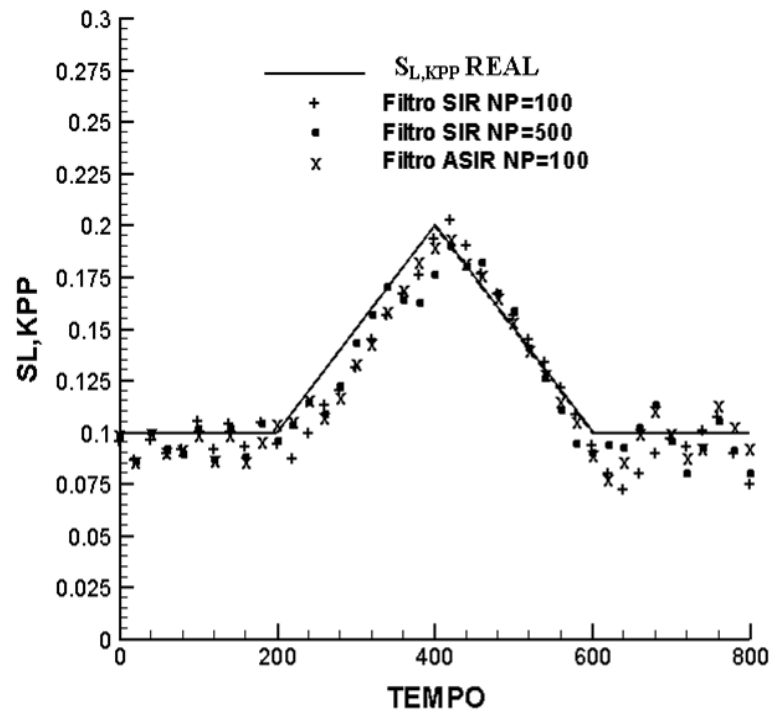


Figura 5.32: Resultados dos filtros Bayesianos

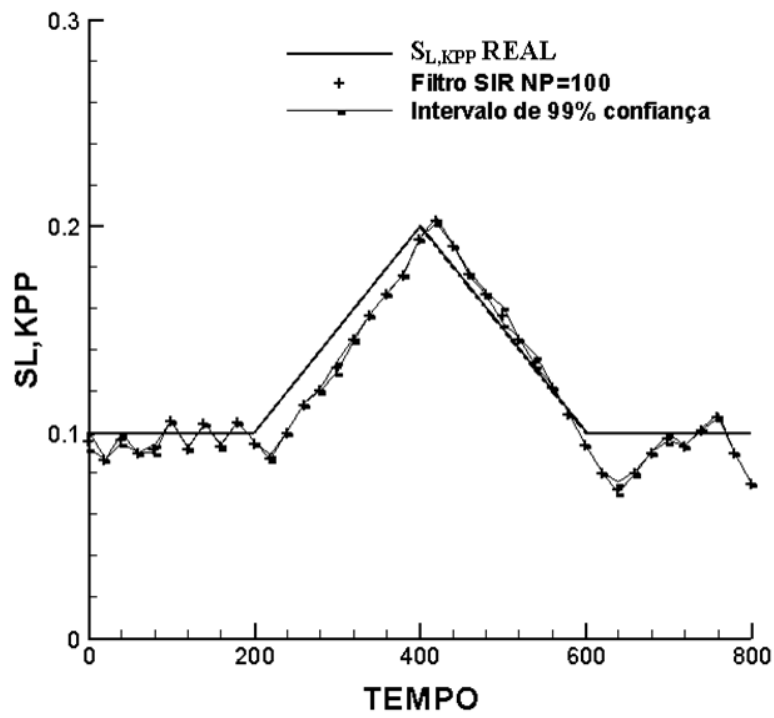


Figura 5.33: Resultado filtro SIR NP=100

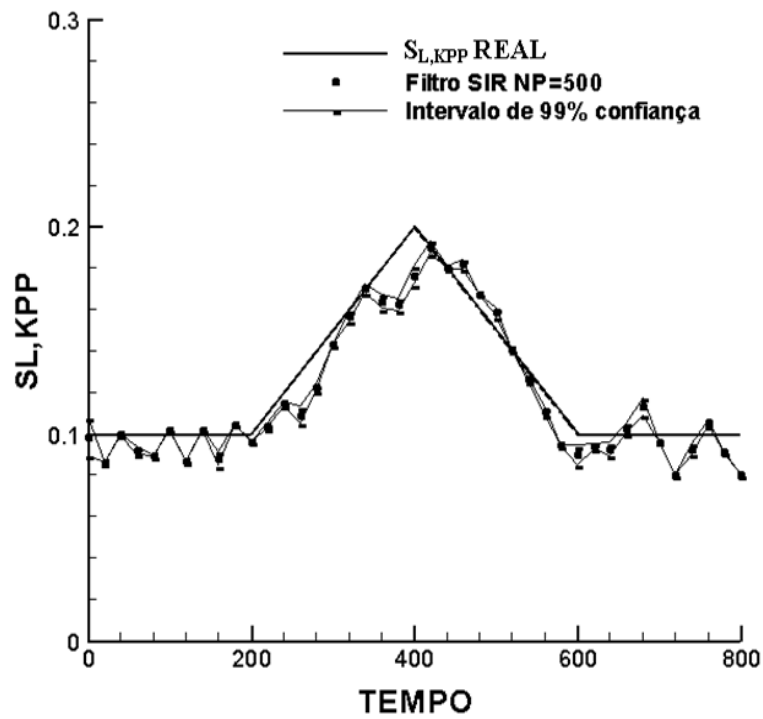


Figura 5.34: Resultado filtro SIR NP=500

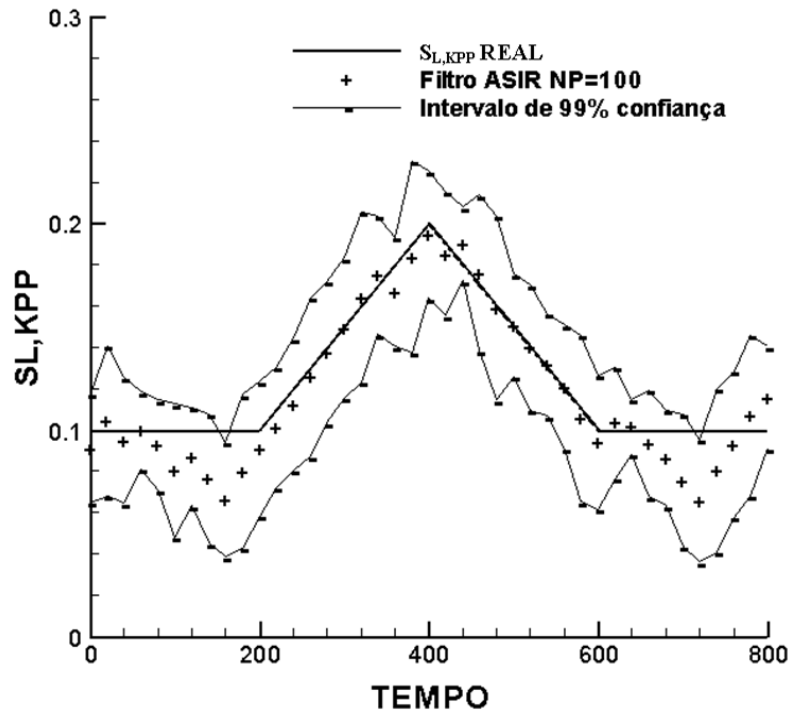


Figura 5.35: Resultado filtro ASIR NP=100

A figura 5.36 mostra a distribuição inicial para uma vegetação aleatória e as figuras 5.37 a 5.41 mostram a recuperação da evolução do incêndio feito pelo filtro ASIR com 100 partículas nos tempos zero, duzentos, quatrocentos, seiscentos e oitocentos segundos, respectivamente.

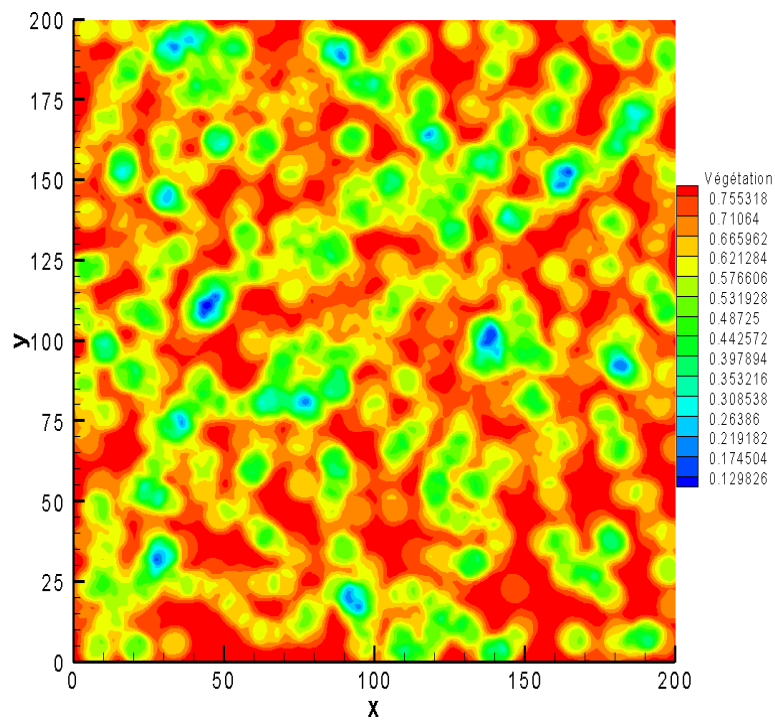


Figura 5.36: Vegetação Inicial

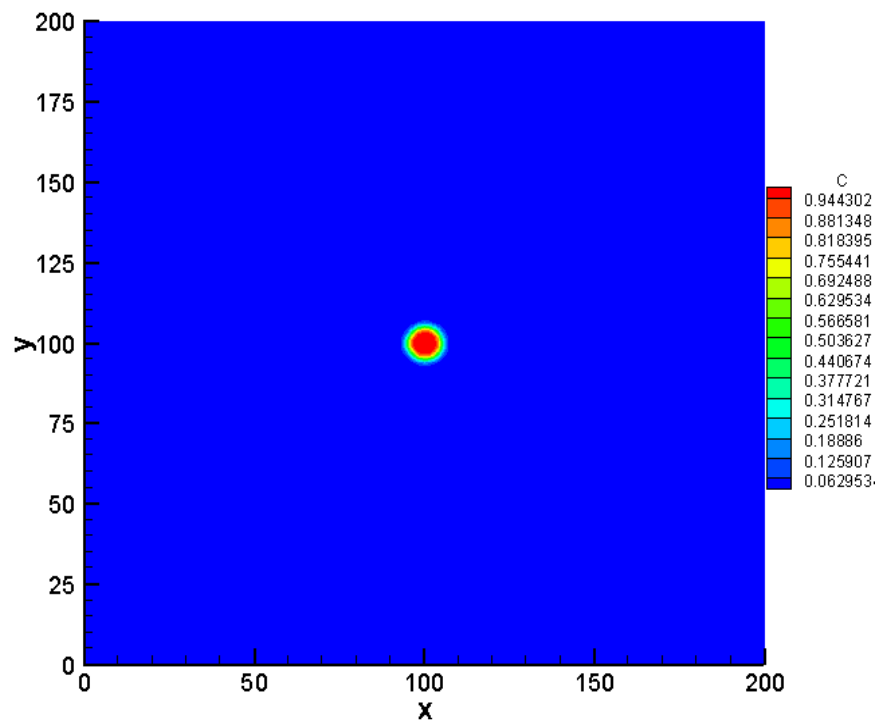


Figura 5.37: Propagação do fogo em 0 segundo

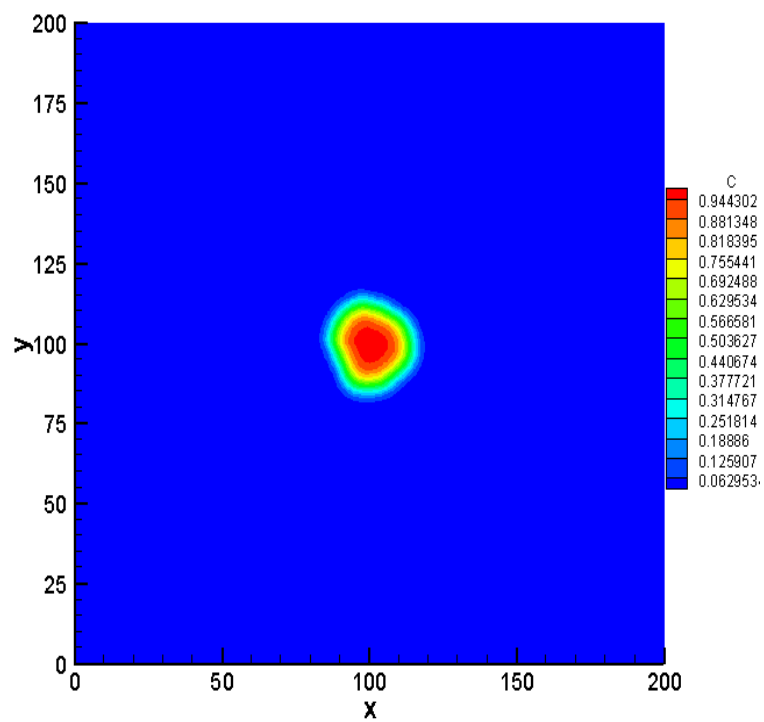


Figura 5.38: Propagação do fogo em 200 segundos

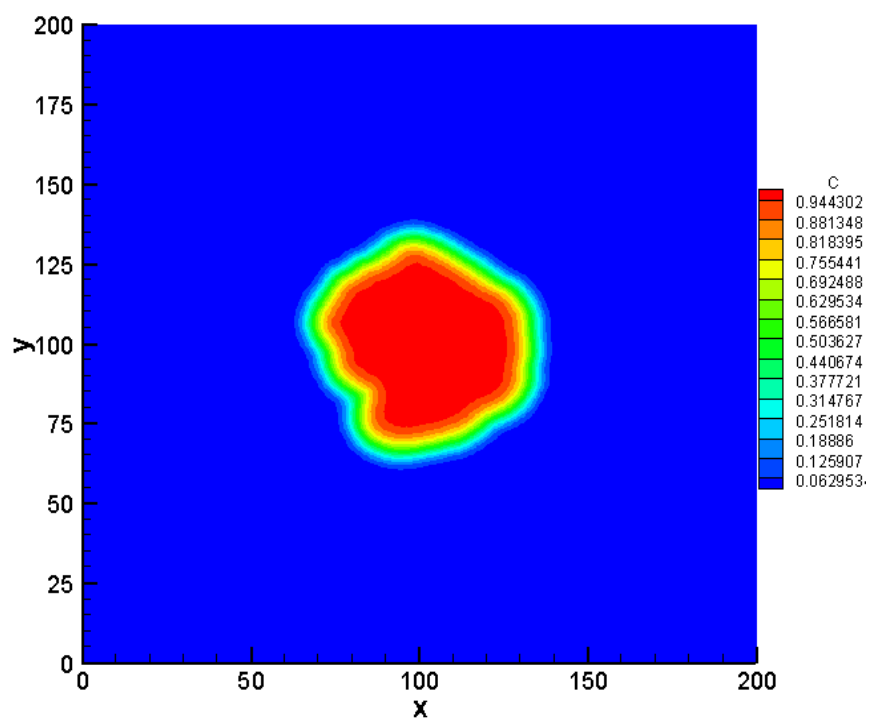


Figura 5.39: Propagação do fogo em 400 segundos.

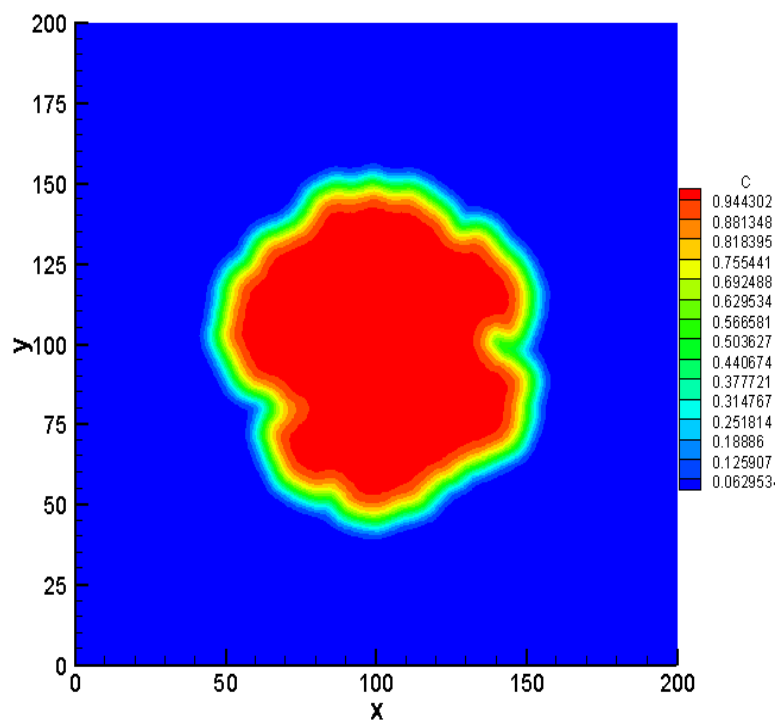


Figura 5.40: Propagação do fogo em 600 segundos

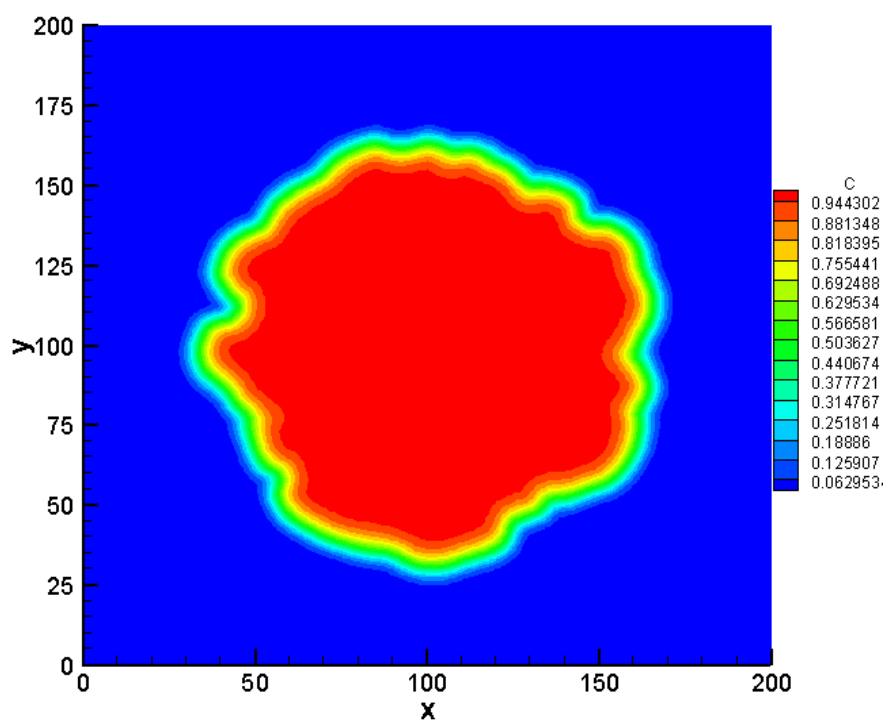


Figura 5.41: Propagação do fogo em 800 segundos

5.4 Resultados do Problema Inverso de Propagação de Incêndio em Escala de laboratório

Para a solução do problema de propagação de incêndio em escalas de laboratório foi utilizado o método de Level Set (código cedido pelo CERFACS) para a solução do problema direto. O CERFACS fixou dx e dy igual ao erro das medidas ou das observações dadas pela resolução da câmera infravermelha (4.7 cm), ou seja, $\sigma_o = dx = dy = 4.7$ cm e $dt = 0.02$.

O desafio proposto pelo CERFACS era tentar prever a fronteira da chama controlando dois parâmetros: o teor de umidade e a relação superfície/volume das partículas; usando medidas experimentais dada por uma câmera infravermelha, em intervalos de tempo de 28 segundos, onde a primeira medida foi obtida em 50 segundos e a última medida em 190 segundos. Porém, os filtros não conseguiram bons resultados numa primeira tentativa. Por isso, inicialmente foram utilizadas medidas experimentais dada por uma câmera infravermelha, em intervalos de tempo de 14 segundos, onde a primeira medida foi obtida em 50 segundos e a última medida em 106 segundos.

A tabela 5.5, apresenta os resultados dos filtros de partículas, em que se têm os erros RMS para cada frente da chama e o tempo computacional consumido para cada teste. Observando essa tabela, fica fácil verificar a diferença dos resultados gerados pelos valores sugeridos por Rothermel's e os resultados gerados pelos filtros de partículas, em que os filtros apresentam os menores erros RMS. Nota-se ainda que os erros apresentados para cada filtro são bem próximos, com uma diferença situada na segunda casa decimal. Por isso, fica difícil afirmar qual filtro tem melhor desempenho para este problema. No entanto, ao somarem todos os erros RMS gerados para cada fronteira em cada um dos tempos analisados, tem-se um melhor desempenho do filtro ASIR com NP= 50.

Observa-se também que o aumento do número de partículas não gera menores erros RMS, fato que não tinha ocorrido até essa aplicação. Isso pode ser devido às incertezas das medidas e das variáveis de estado, pois ao utilizar o passeio aleatório, isto é, um modelo não informativo para os modelos de evolução, torna-se essencial ter uma boa informação apriori para definir a variância desse modelo. Porém, nessa aplicação não é possível saber se a informação apriori é confiável, por isso, tem-se uma dificuldade enorme em definir os desvios padrões e determinar a região de procura.

Portanto, foram empregados valores altos para esses desvios padrões, ou seja, tem-se uma grande região de procura e com isso muitas partículas podem cair em mínimos locais ou ficarem perdidas em regiões de fraca probabilidade.

Tabela 5.5: Erros RMS e tempo CPU

Filtro Bayesiano	Número de partículas (NP)	Erro RSM 1ªFrente (64 s)	Erro RSM 2ªFrente (78 s)	Erro RSM 3ªFrente (92 s)	Erro RSM 4ªFrente (106 s)	Soma dos erros RMS	Tempo CPU (min.)
Valores de Rothermel's	0	0.3320	0.4062	0.4773	0.7629	1.9784	1.6399
SIR	25	0.1417	0.1915	0.1103	0.2900	0.7335	9.0996
SIR	50	0.1418	0.1942	0.1107	0.2837	0.7304	17.958
SIR	100	0.1378	0.2108	0.1194	0.2797	0.7477	36.465
SIR	400	0.1791	0.2060	0.1105	0.2721	0.7677	220.80
ASIR	25	0.1607	0.1952	0.1088	0.2826	0.7473	17.987
ASIR	50	0.1461	0.1942	0.1212	0.2646	0.7261	36.030
ASIR	100	0.1811	0.2119	0.1137	0.2674	0.7741	72.678

A fim de mostrar a necessidade de se ajustar o teor de umidade e a relação superfície/volume, conforme realizado neste trabalho, apresenta-se na figura 5.42 os resultados obtidos com os valores de Rothermel's dados pela tabela 5.5. Esta figura mostra claramente o péssimo desempenho dos valores fixados por Rothermel's para esse problema, já que, as fronteiras simuladas com esses valores ficaram muito distantes das fronteiras reais dadas pelo experimento.

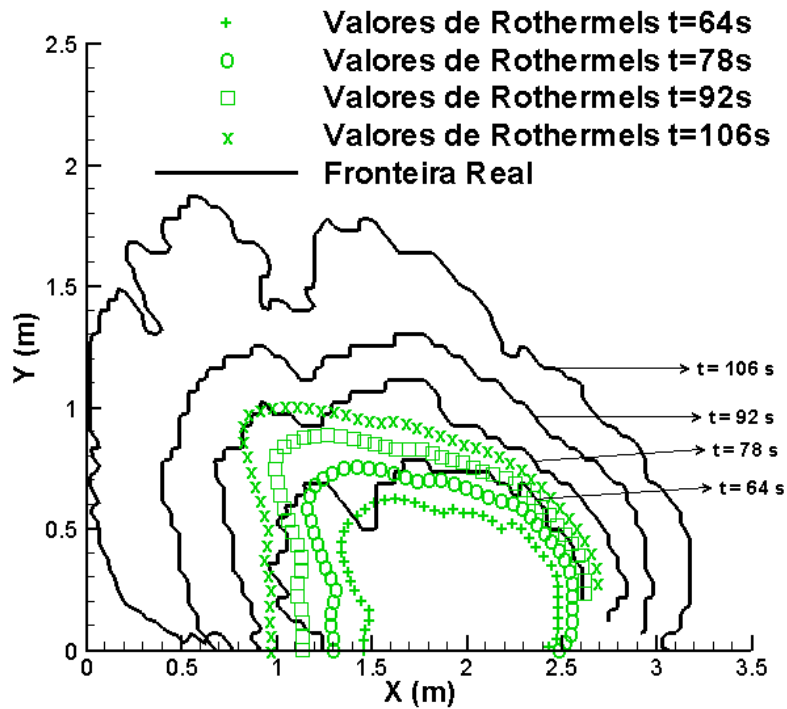
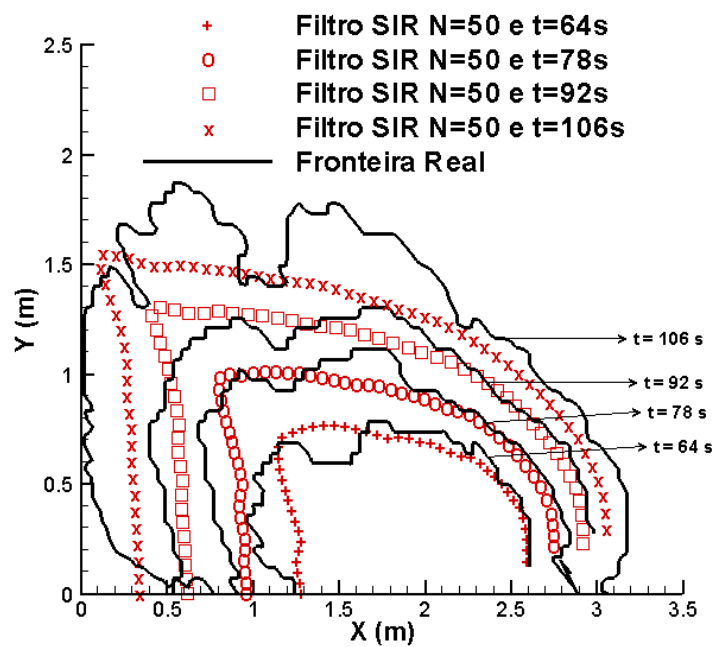
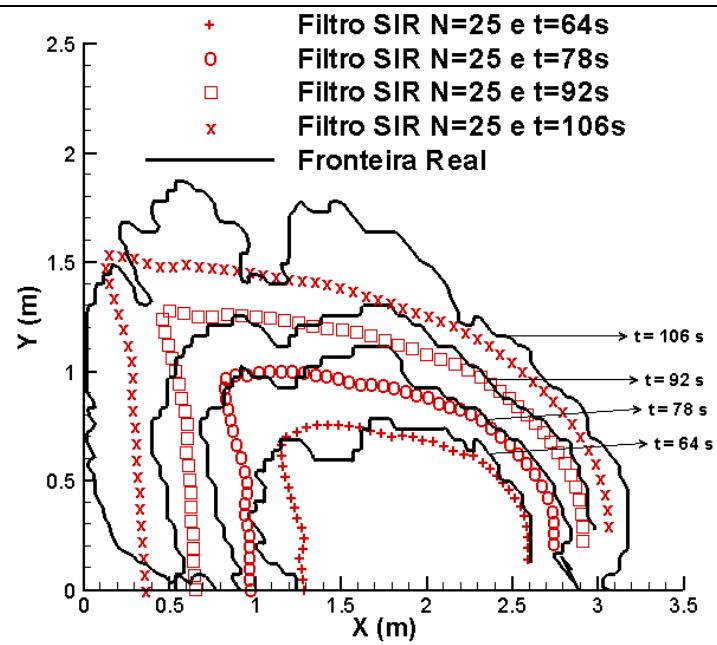


Figura 5.42: Comparação entre a fronteira real e a fronteira gerado pelso parâmetros de Rothermel's.

Ao se observar a figura 5.43, nota-se que o filtro SIR com 25, 50, 100 e 400 partículas tem resultados bem semelhantes para todos os casos testes. Já na figura 5.44 percebe-se que o filtro ASIR com 50 partículas apresenta uma melhor aproximação para as fronteiras.



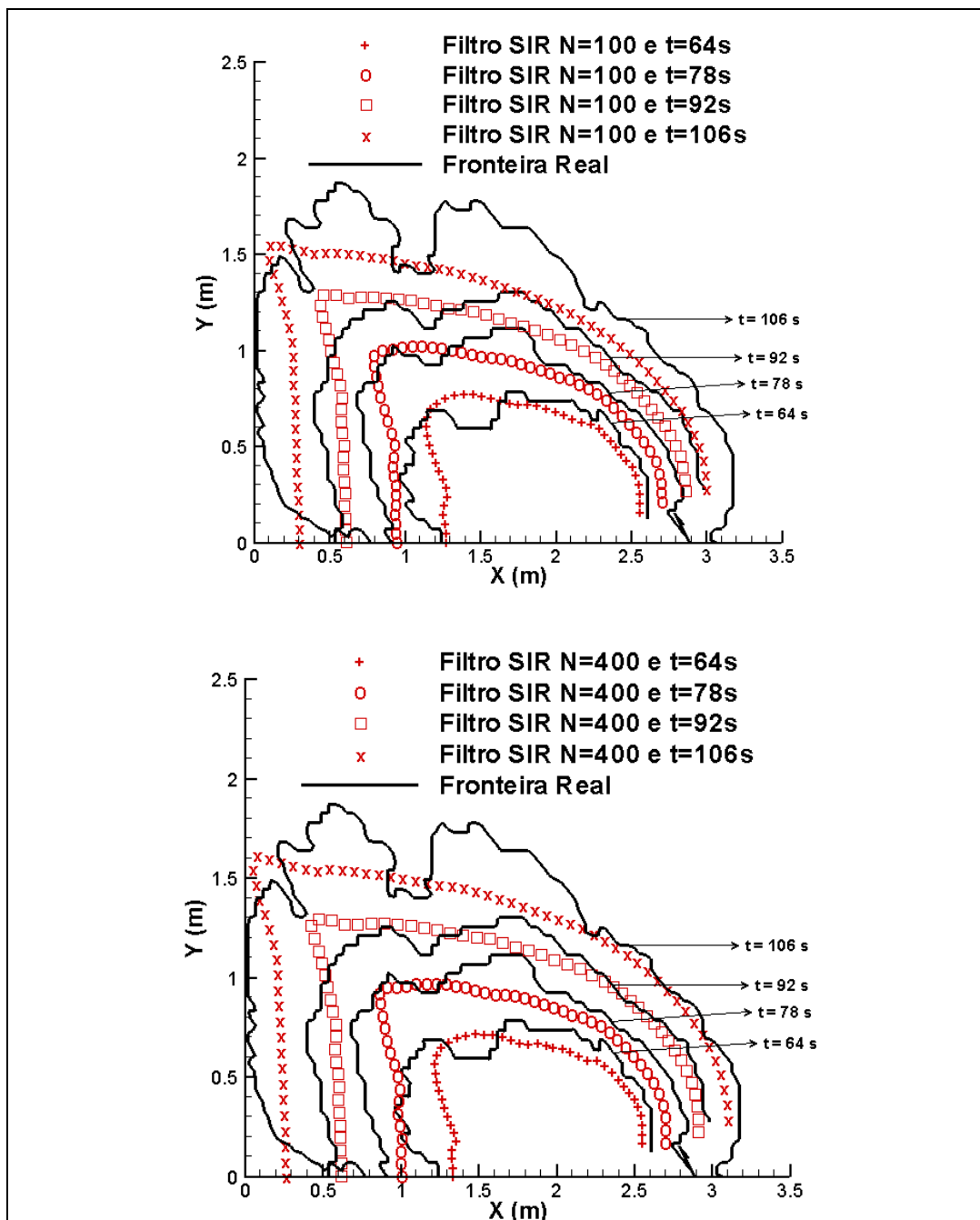
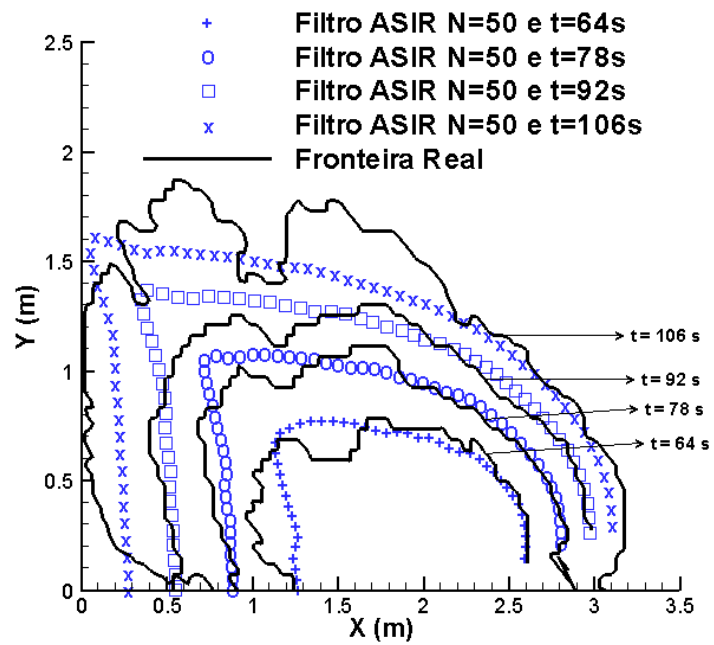
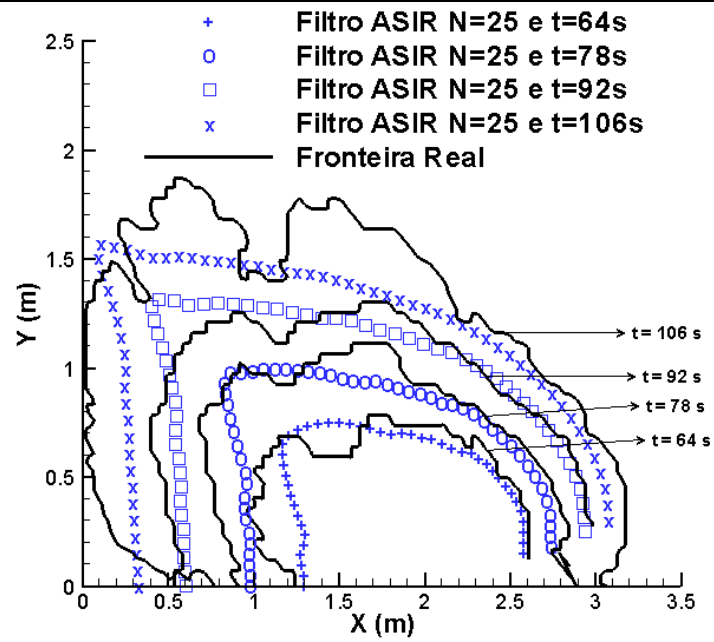


Figura 5.43: Resultado do filtro SIR para a fronteira do fogo.



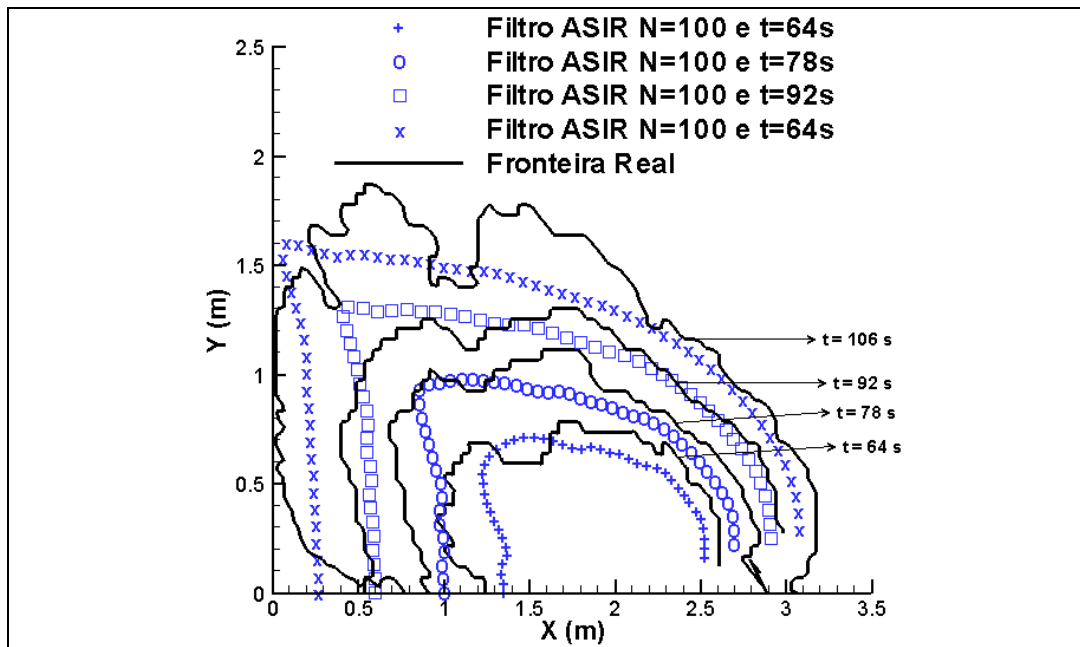
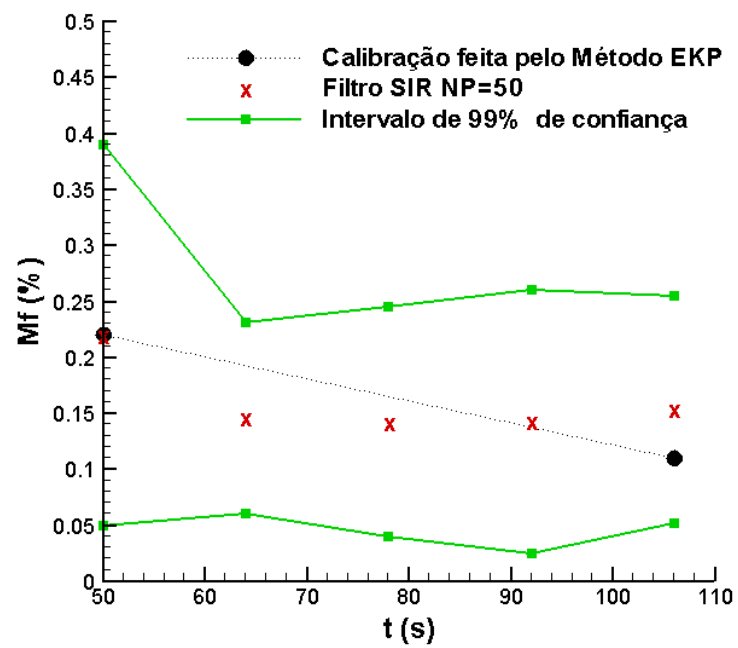
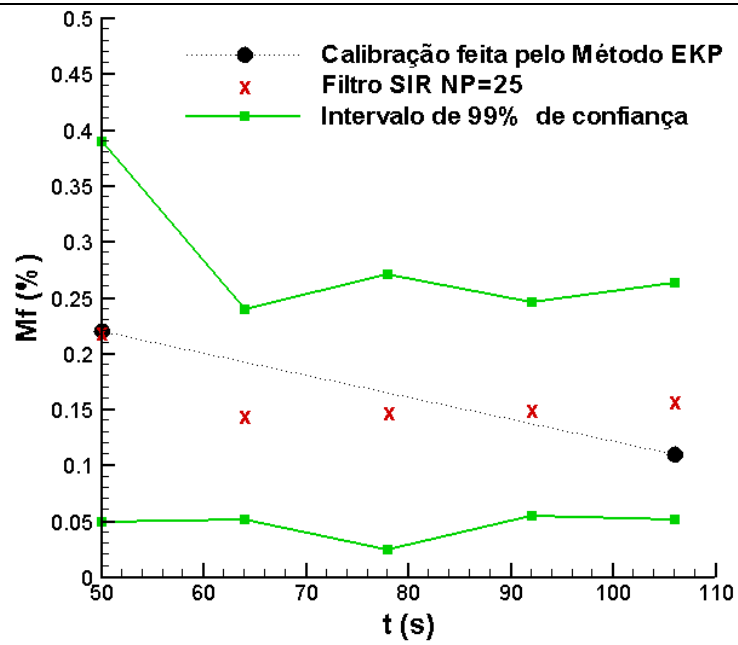
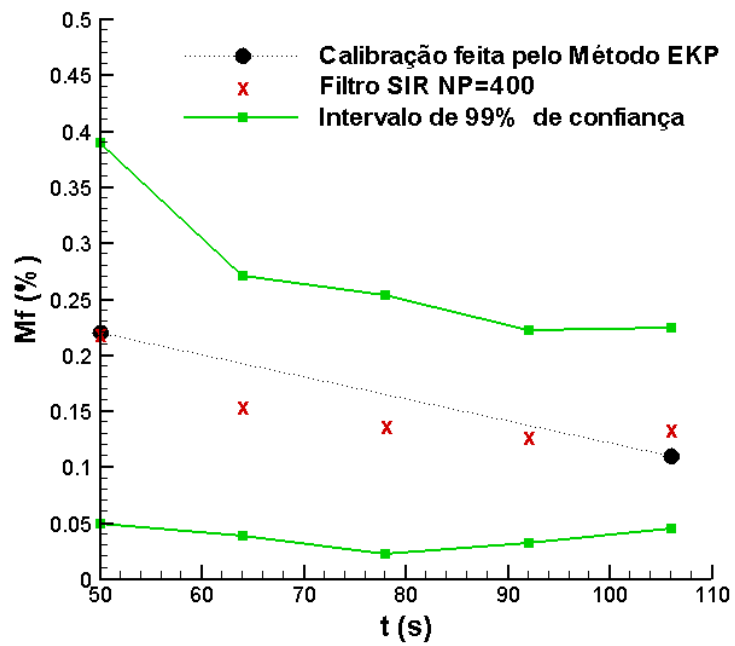
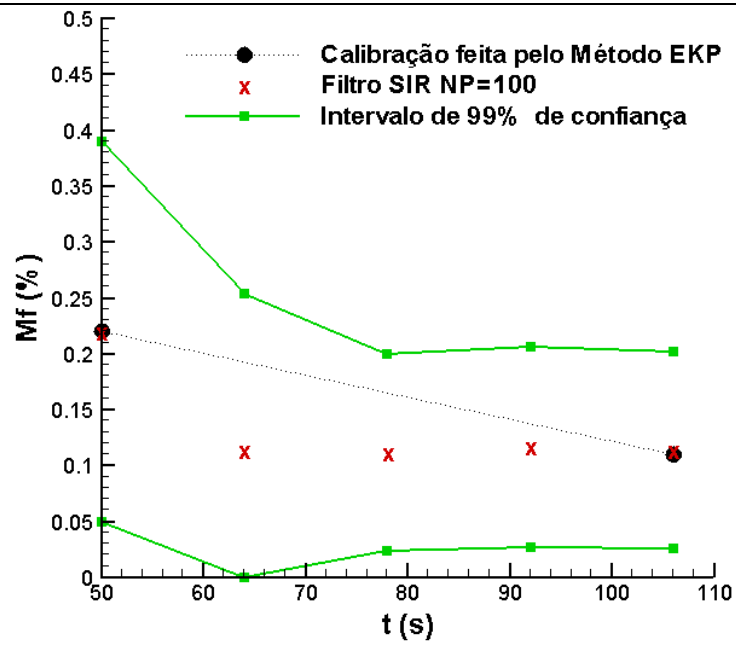


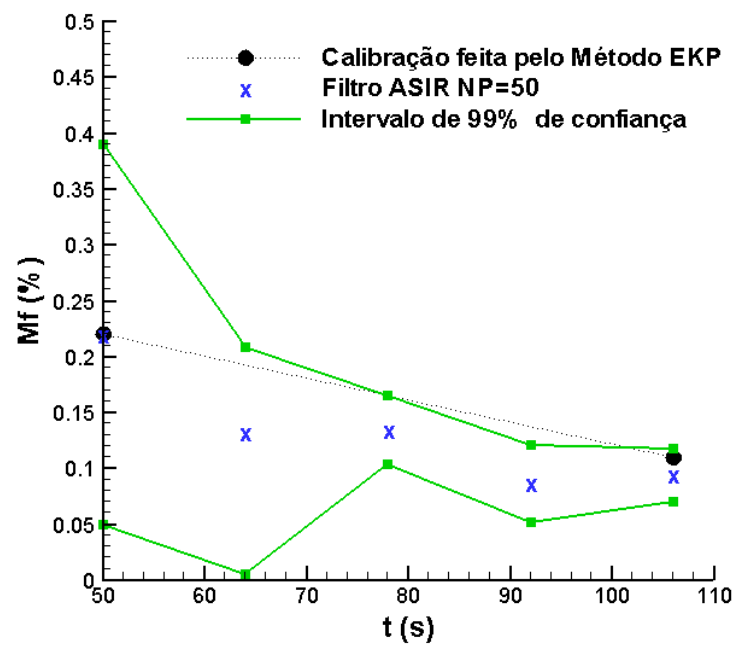
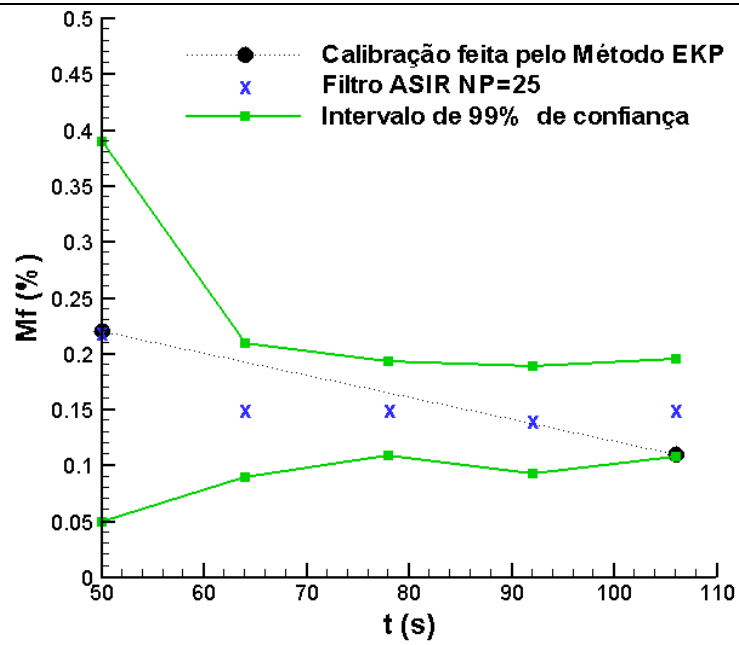
Figura 5.44: Resultado do filtro ASIR para a fronteira do fogo.

As figuras 5.45 e 5.46 foram preparadas para possibilitar uma melhor análise dos dois filtros testados. Estas figuras mostram as estimativas do teor de umidade e da relação superfície/volume, e a comparação destes com os valores encontrados pelo CERFACS.

A figura 5.45, apresenta os resultados para o teor de umidade da vegetação utilizando os filtros de partículas. Analisando a figura tem-se que o resultado do filtro SIR com 100 partículas está próximo de 0.11 no tempo de cento e seis segundos. Esse valor foi encontrado pelo método do filtro de Kalman Estendido (EKF - Extended Kalman filter) pelo CERFACS (Centre Européen de Recherche et de Formation Avancée en Calcul Scientifique). Porém, o filtro ASIR com 50 e 100 partículas também apresentam uma boa aproximação e um intervalo de confiança bem menor que os filtros SIR.







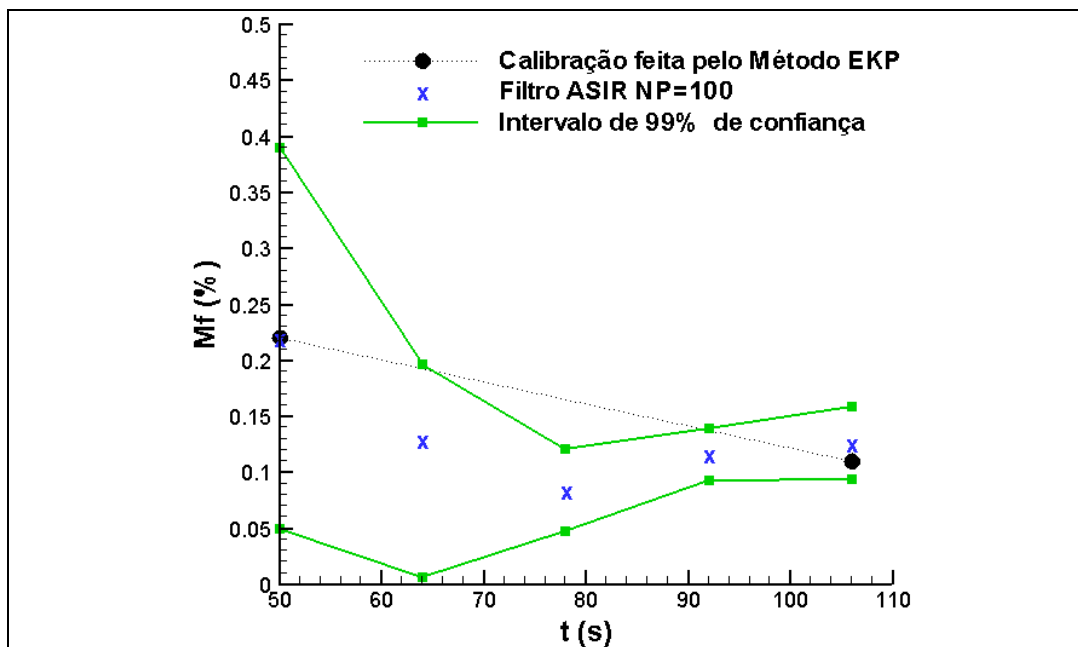
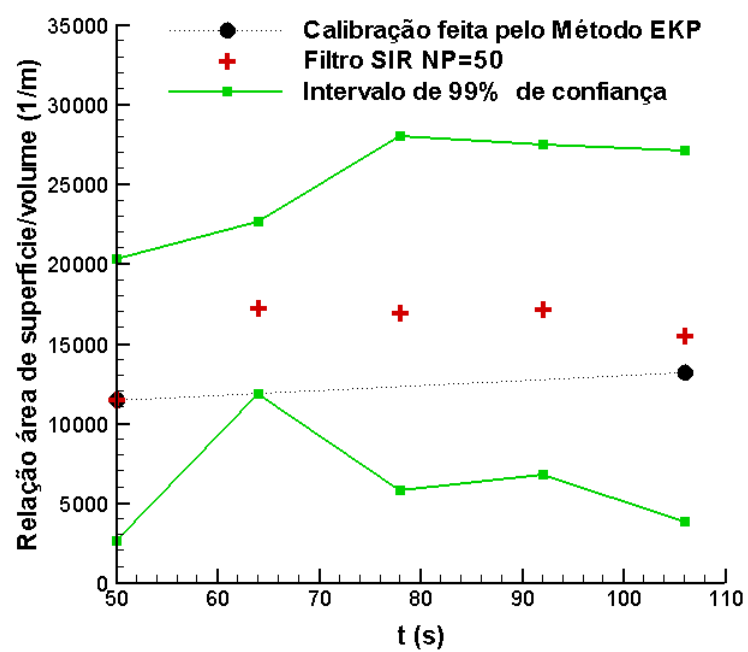
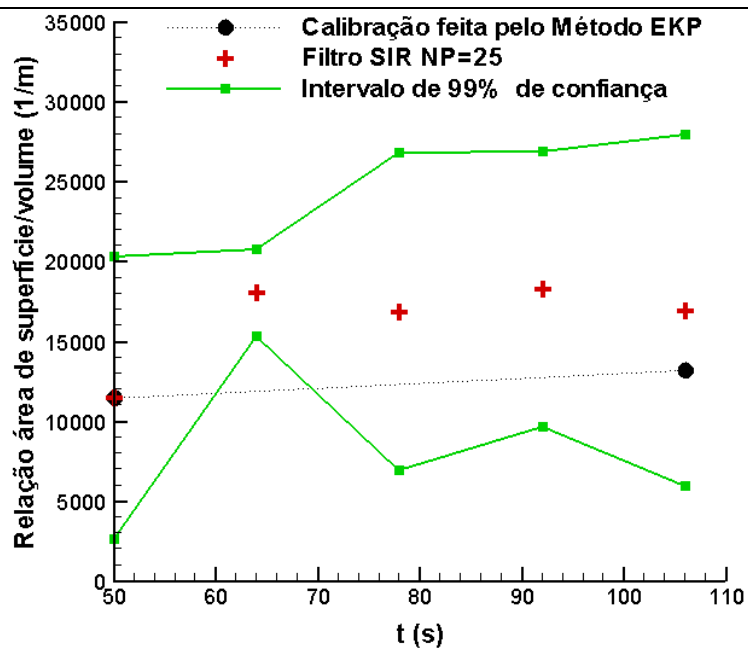
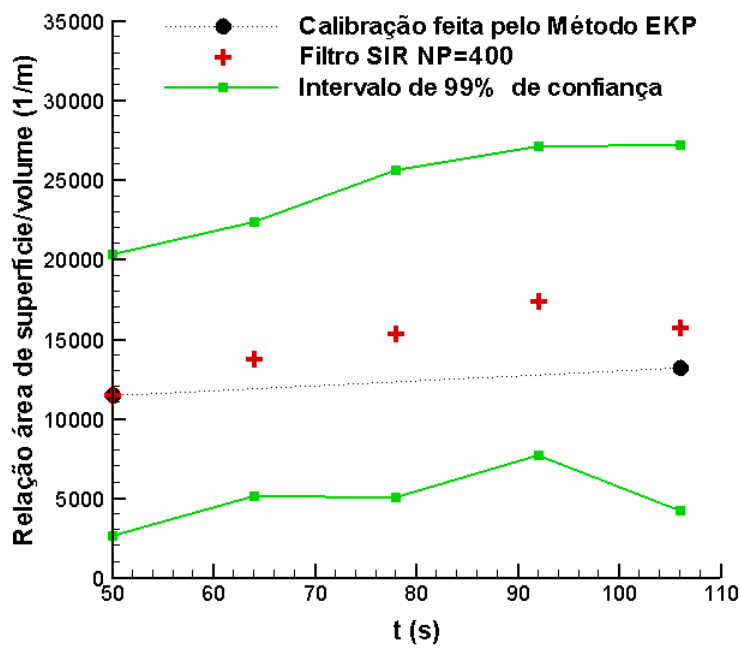
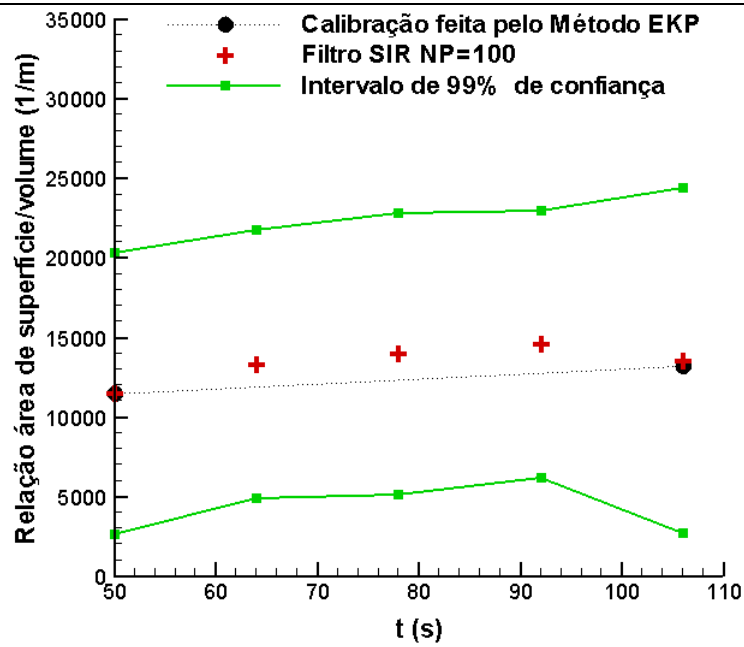
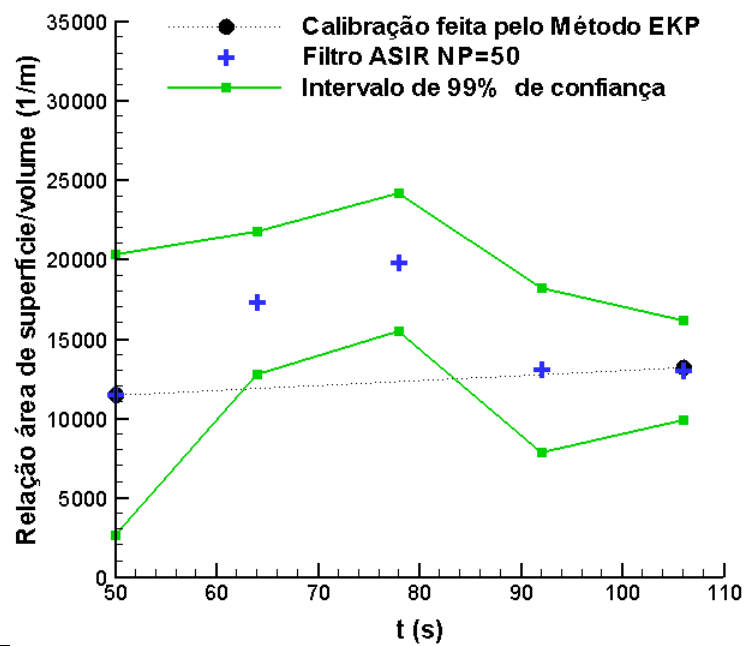
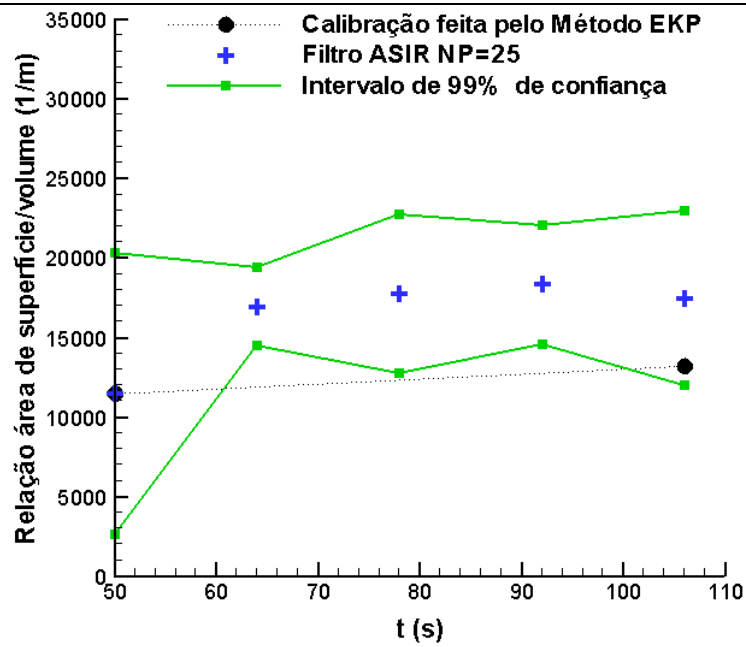


Figura 5.45: Resultado do filtro Bayesiano para o teor de umidade

A figura 5.46 apresentam os resultados obtidos para a relação superfície/volume utilizando os filtros SIR e ASIR. Tal como no caso do teor de umidade o filtro SIR com 100 partículas encontra-se um valor próximo de 13193 m^{-1} no tempo de cento e seis segundos, que é o valor fornecido pelo CERFACS. No entanto, novamente o filtro ASIR com 50 partículas apresenta uma boa aproximação e um intervalo de confiança bem menor que os filtros SIR com 100 partículas para esta variável.







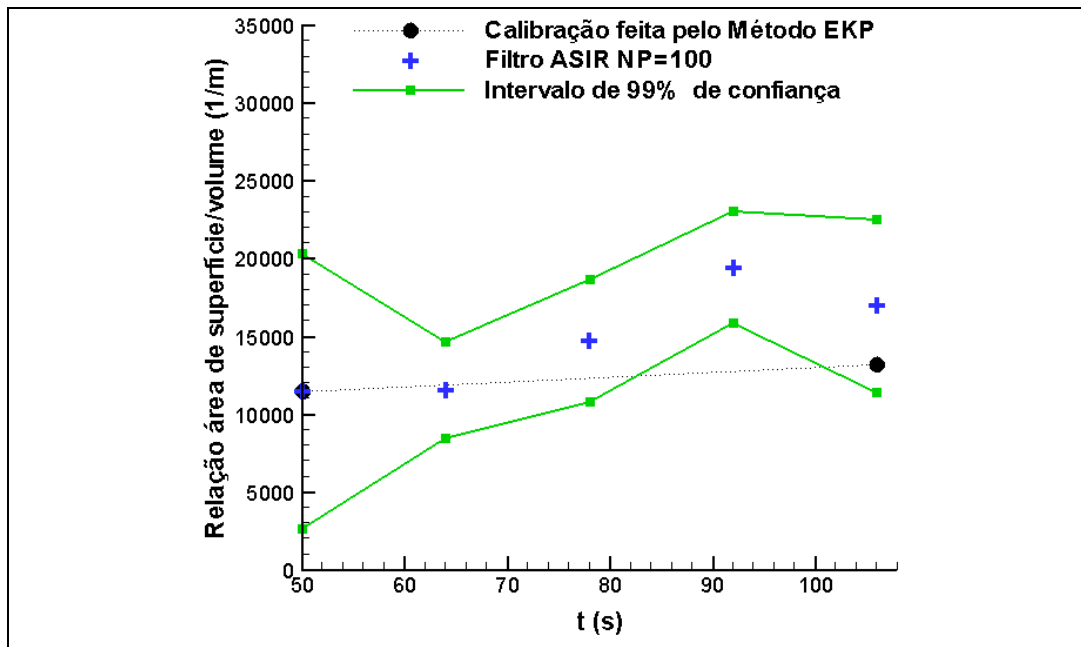
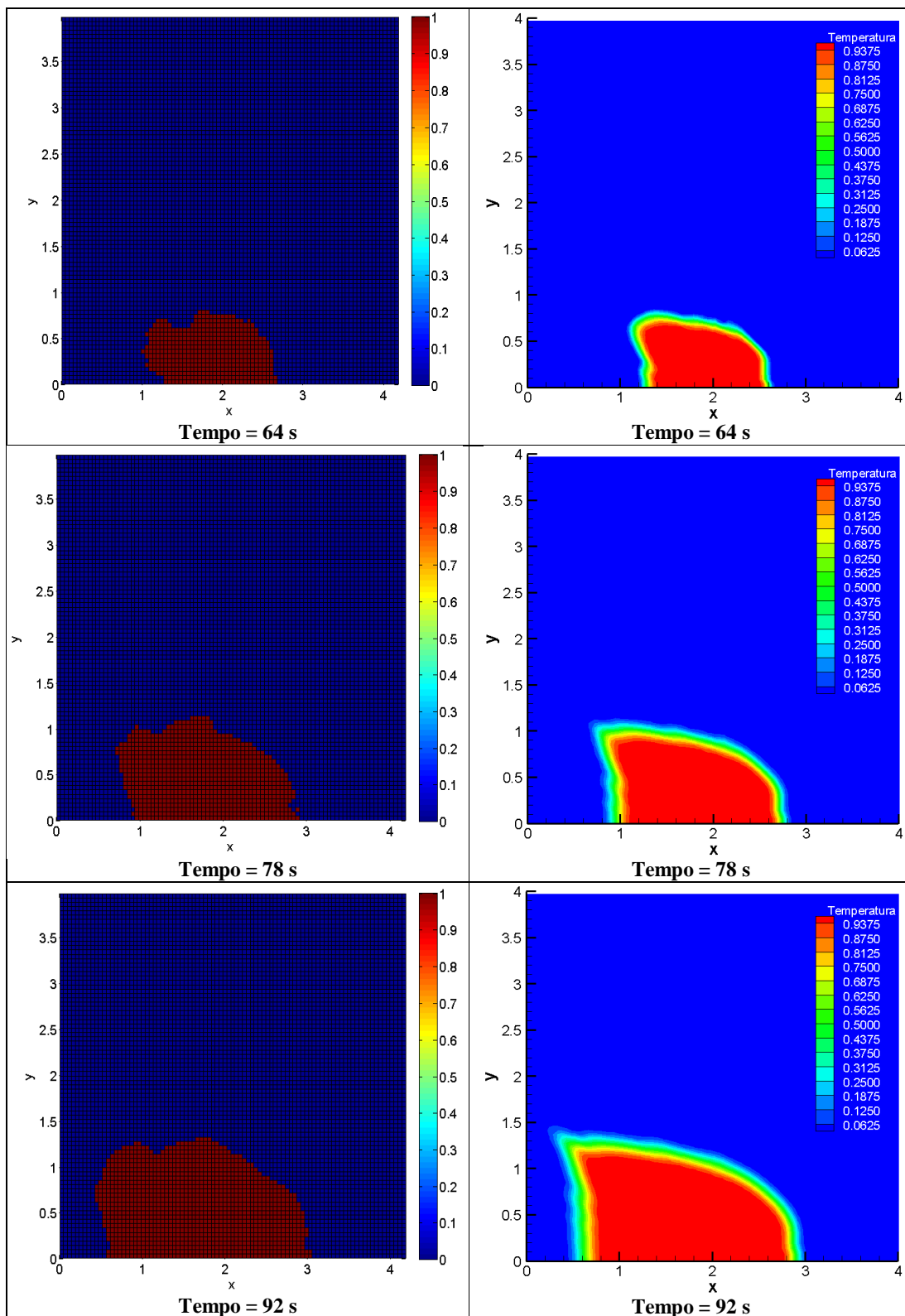


Figura 5.46: Resultados para a relação superfície/volume.

As figuras 5.47 e 5.48 apresentam a comparação entre a propagação da chama real, os resultados obtidos pelo filtro SIR com 100 partículas e pelo filtro ASIR com 50 partículas, respectivamente. Nota-se que há uma excelente concordância entre as soluções geradas pelos filtros de partículas SIR e ASIR e a chama real, mesmo considerando-se a limitação do modelo e as incertezas sobre os parâmetros e as medidas.



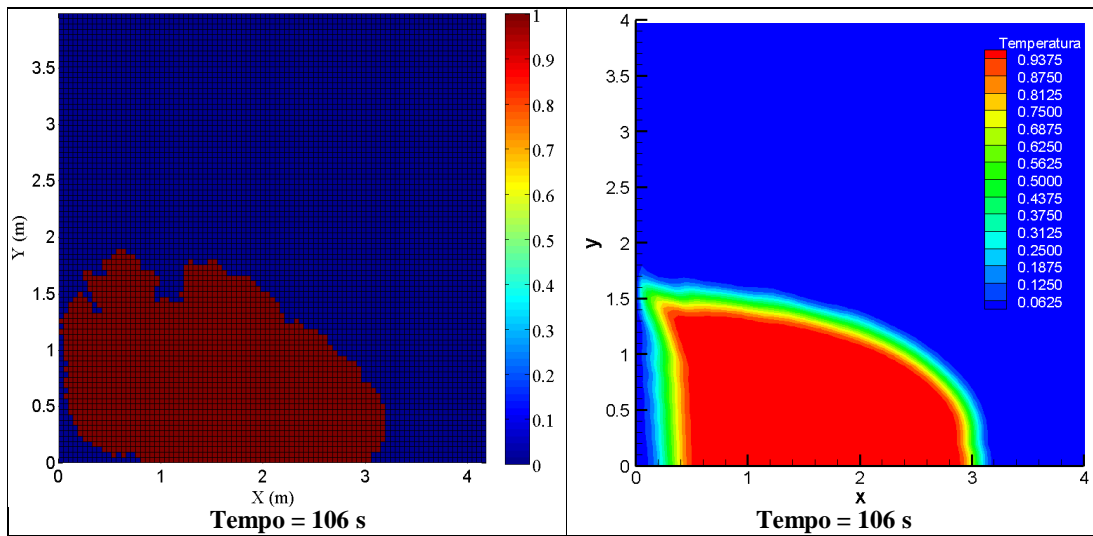
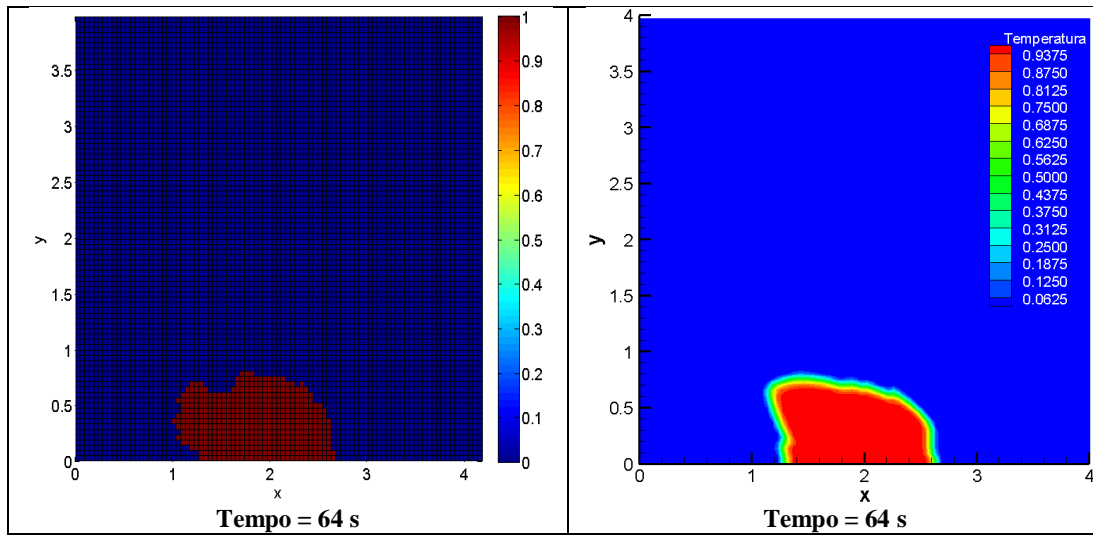


Figura 5.47: Comparação entre os dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro SIR com $N=100$.



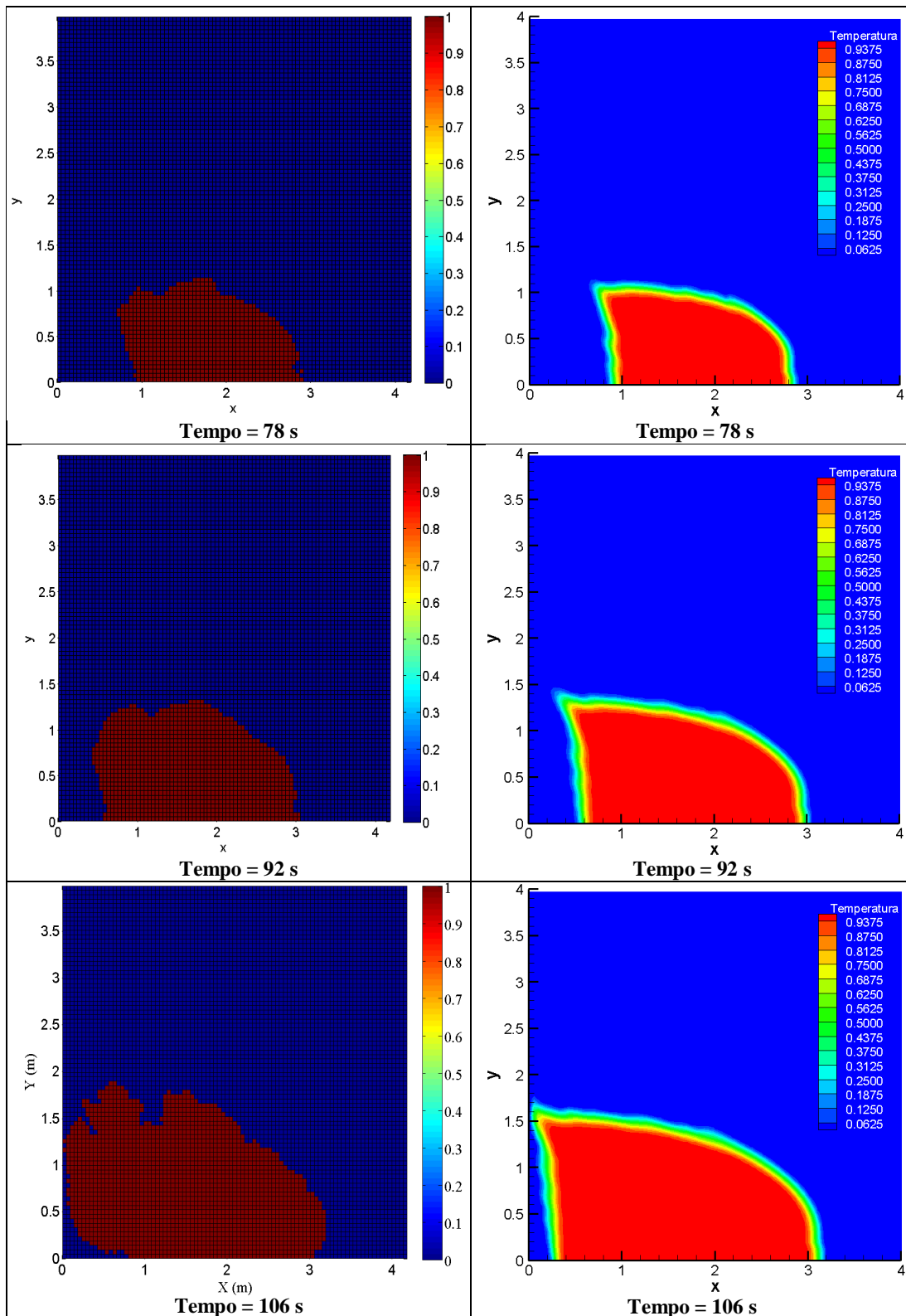


Figura 5.48: Comparação entre os dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro ASIR com $N=50$.

A fim de prever a fronteira da chama com a utilização de imagens a cada 28 segundos, foi feita a estimação da velocidade do vento junto à estimativa da relação superfície/volume e do teor umidade do leito do combustível.

A tabela 5.6 mostra a diferença dos erros RMS com e sem a estimação feita na amplitude do vento. Fica bem evidente que é necessário o ajuste para a amplitude do vento, pois obtêm-se valores bem menores para os erros RMS. A influência da estimação é mais clara no tempo de 78 segundos, pois os menores valores dos erros RMS utilizando um valor médio para a amplitude do vento são de 0.1915 para o filtro SIR e 0.1942 para o filtro ASIR, enquanto com a estimativa da amplitude do vento os menores valores são de 0.0956 para o filtro SIR e 0.1043 para o filtro ASIR. Já em 106 segundos os valores dos erros RMS ficaram bem próximos, porque nesse caso o valor médio utilizado na primeira etapa é bem próximo do valor estimado para a amplitude da velocidade do vento.

Tabela 5.6: Comparação com e sem a estimação da velocidade do vento

Resultados	Filtro Bayesiano	Erro RSM 1ª Fronteira (78 s)	Erro RSM 2ª Fronteira (106 s)
Sem a estimação da amplitude do vento	SIR	0.1915	0.2721
Com a estimação da amplitude do vento	SIR	0.0956	0.2642
Sem a estimação da amplitude do vento	ASIR	0.1942	0.2646
Com a estimação da amplitude do vento	ASIR	0.1043	0.2647

No entanto, mesmo estimando a velocidade do vento não foi possível prever as fronteiras da chama para tempos maiores que 106 segundos. No entanto, ao ser feito a mudança no parâmetro C_f apresentado por Rothermel, mostrado no Apêndice A, tem-se resultados bem promissores, como mostra a figura 5.49 que resalta a necessidade deste de estimar. De acordo com ROTHERMEL essa constante tem o valor fixado igual a 7.47, mostrado pela equação (A.6.c), porém para o problema proposto esse valor não apresentou bons resultados. Por isso, foi sugerido uma variação nesse parâmetro, onde $C_f = 7.47$ até o tempo de 106 segundos e para os tempos seguintes $C_f = 0.47$, esse valor foi usado de forma a melhorar o resultado.

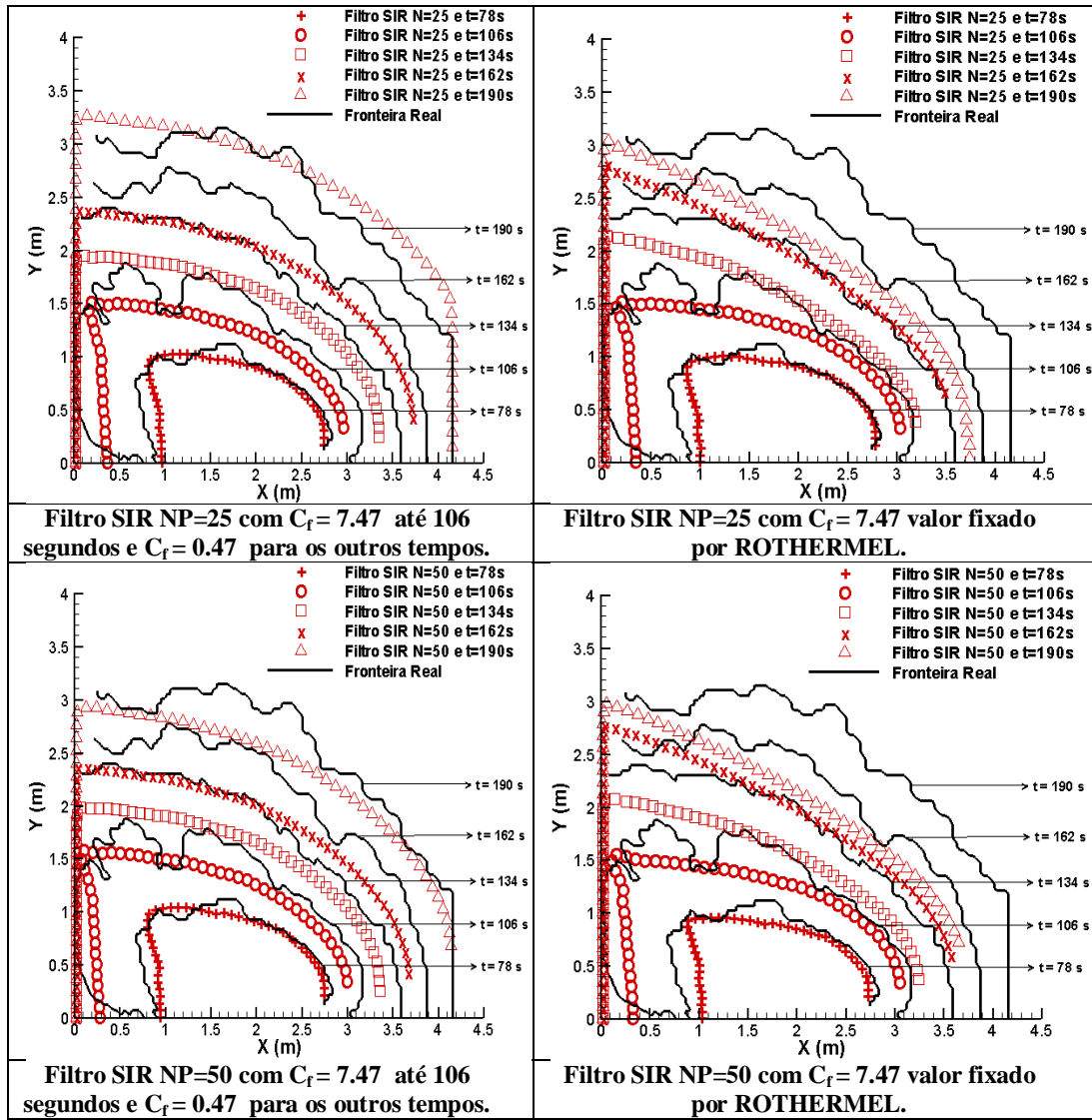


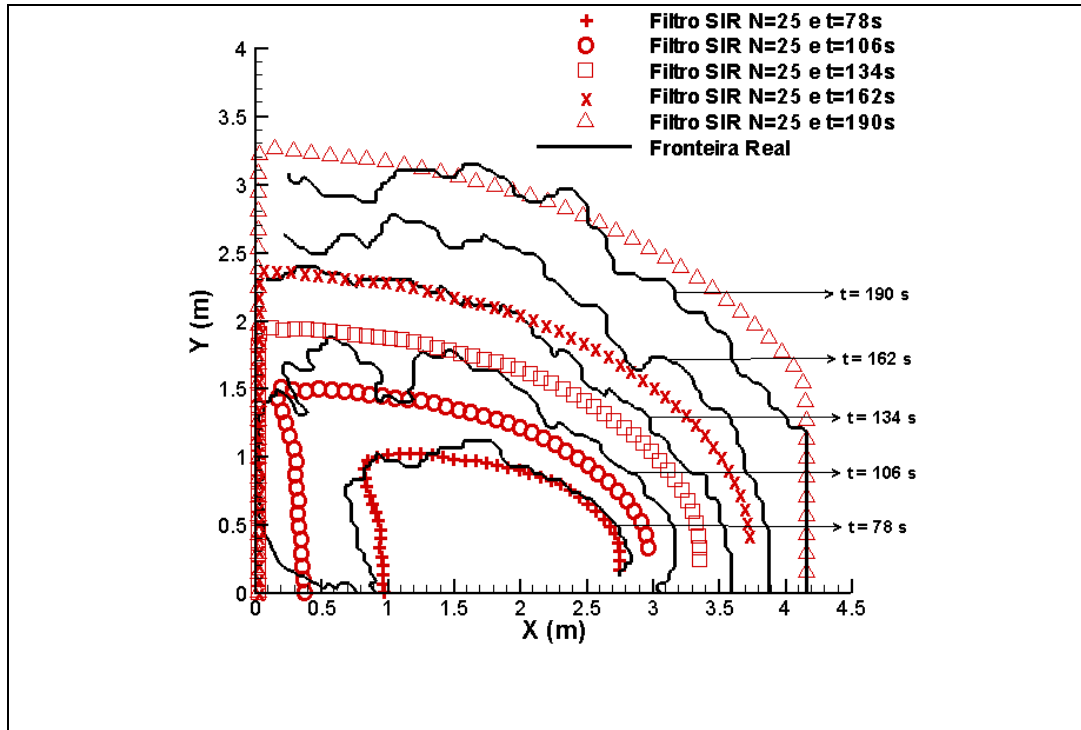
Figura 5.49: Comparação para as fronteiras de propagação do fogo variando constante experimental C_f

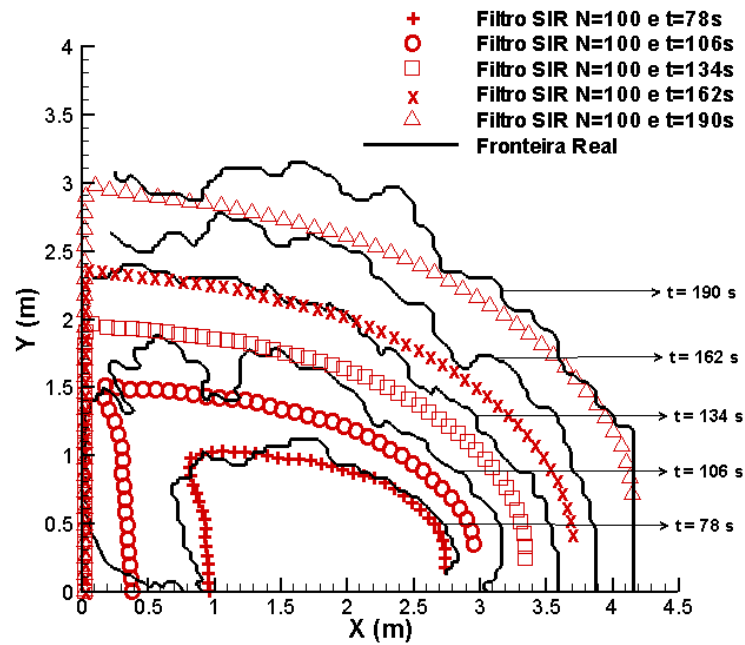
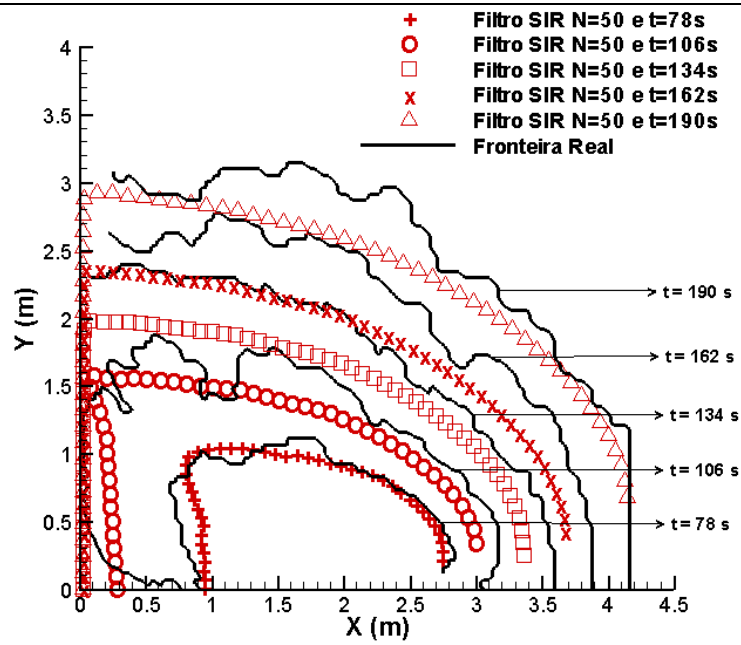
A tabela 5.7, apresenta o resultado com as modificações propostas, em que têm-se os erros RMS para a estimativa da frente de chama em diferentes tempos e o tempo computacional gasto para cada teste. Nota-se que os erros RMS dos diferentes filtros são bem próximos para este caso. Por outro lado, ao somarem-se todos os erros RMS, o filtro ASIR com 50 partículas apresenta o menor valor para o erro total.

Tabela 5.7: Erros RMS e tempo CPU

Filtro de Part.	Número de partículas (NP)	Erro RSM 1ª Frente (78 s)	Erro RSM 2ª Frente (106 s)	Erro RSM 3ª Frente (134 s)	Erro RSM 4ª Frente (162 s)	Erro RSM 5ª Frente (190 s)	Soma dos erros	Temps CPU time (min.)
SIR	25	0.1037	0.2976	2.5683	2.8106	3.2251	9.005	23.833
SIR	50	0.1002	0.2680	2.5669	2.8011	3.0948	8.831	47.854
SIR	100	0.1067	0.2980	2.5664	2.8055	3.0966	8.873	94.786
SIR	200	0.0956	0.2642	2.5710	2.8089	3.0989	8.838	285.78
ASIR	25	0.1675	0.2842	2.5778	2.8121	3.0995	8.941	48.514
ASIR	50	0.1033	0.2647	2.5681	2.8078	3.0969	8.831	95.321
ASIR	100	0.1718	0.2883	2.5715	2.8090	3.0988	8.939	292.30
ASIR	200	0.1139	0.2640	2.5650	2.8036	3.0965	8.843	582.15

Nota-se na figura 5.50 que o filtro SIR com mais de 25 partículas tem resultados bem próximos para todos os casos testes. Já a figura 5.51 tem-se o filtro ASIR com NP=50 como a melhor opção para as fronteiras. Observa-se ainda que há uma melhora nos resultados para as fronteiras nos tempos 78 e 106 segundos se comparamos com os resultados apresentados anteriormente, além disso tem-se agora resultados para as fronteiras com tempos superiores a 106 segundos, o que antes não era possível.





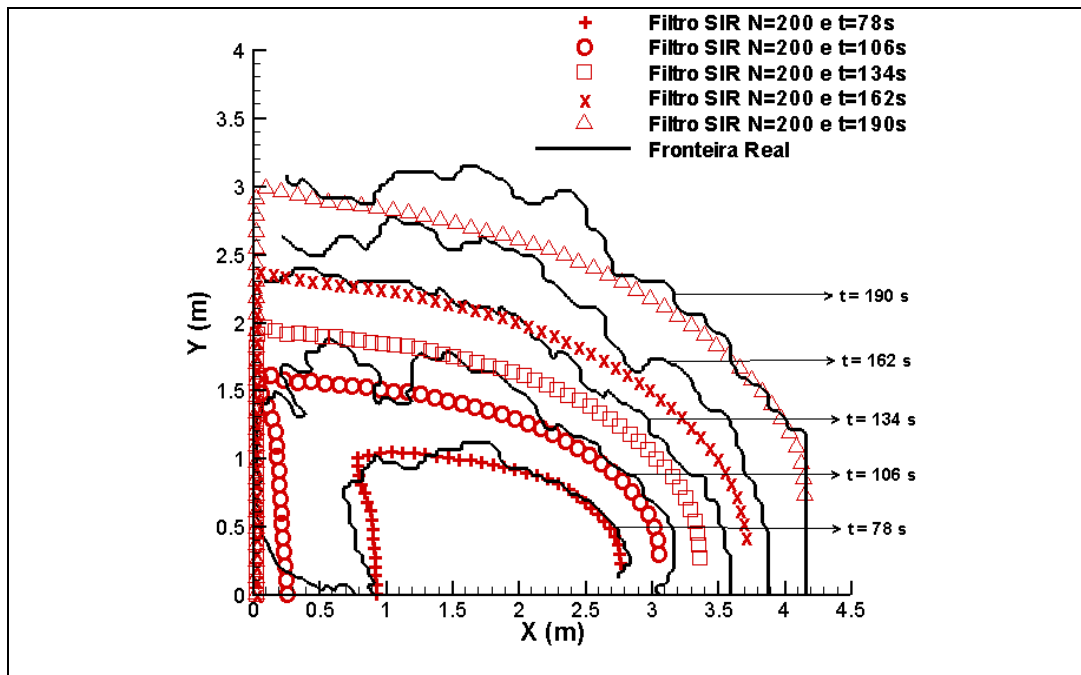
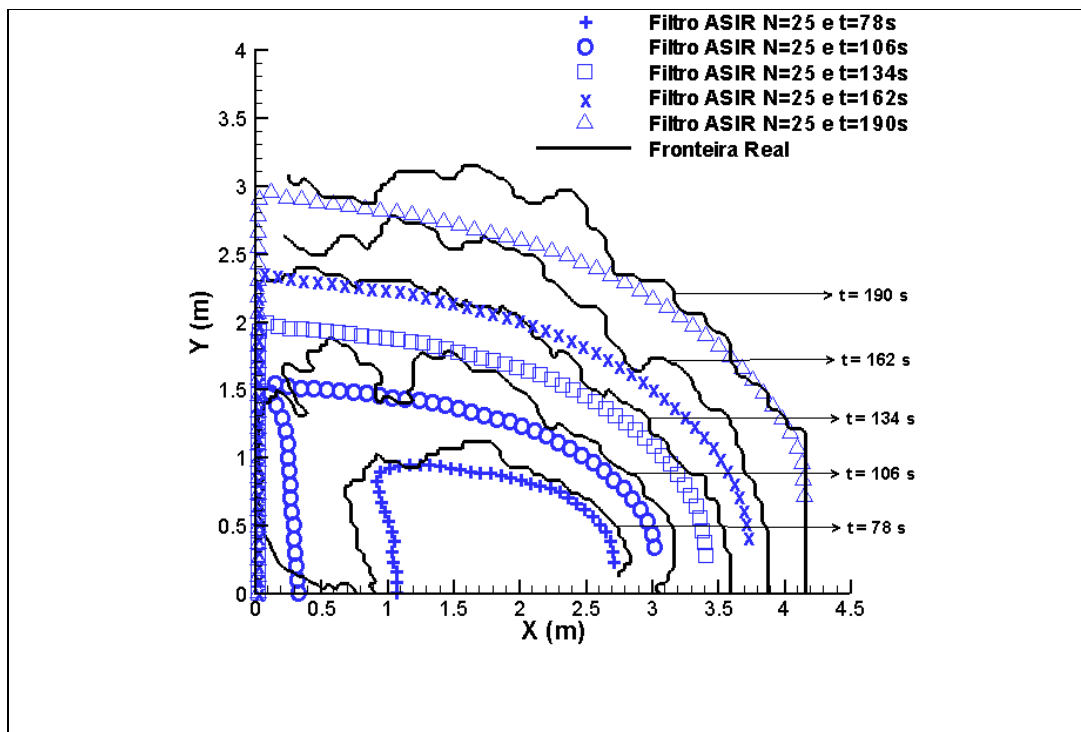
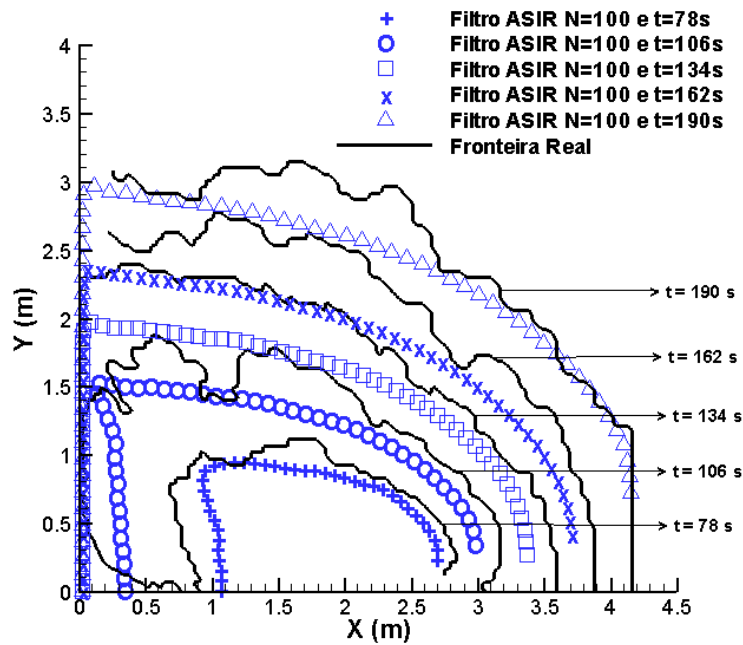
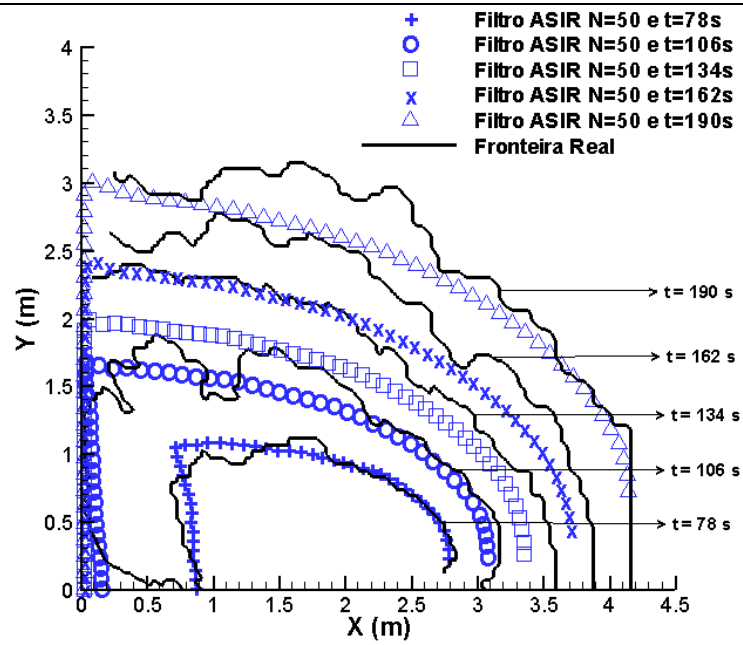


Figura 5.50: Resultado do filtro SIR para a fronteira do fogo





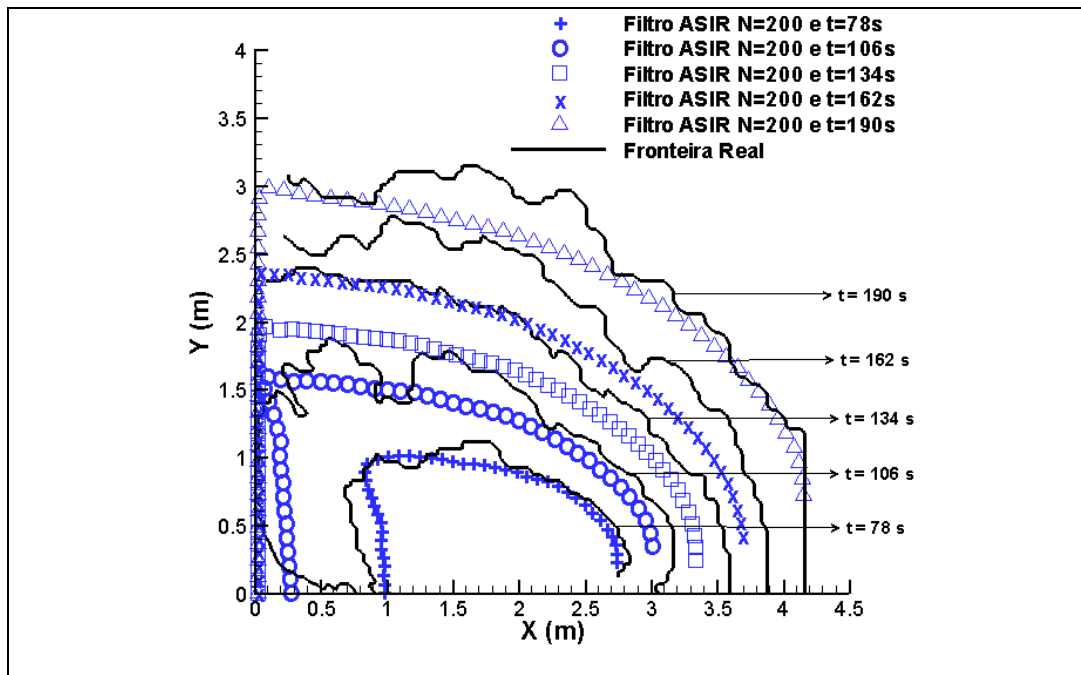
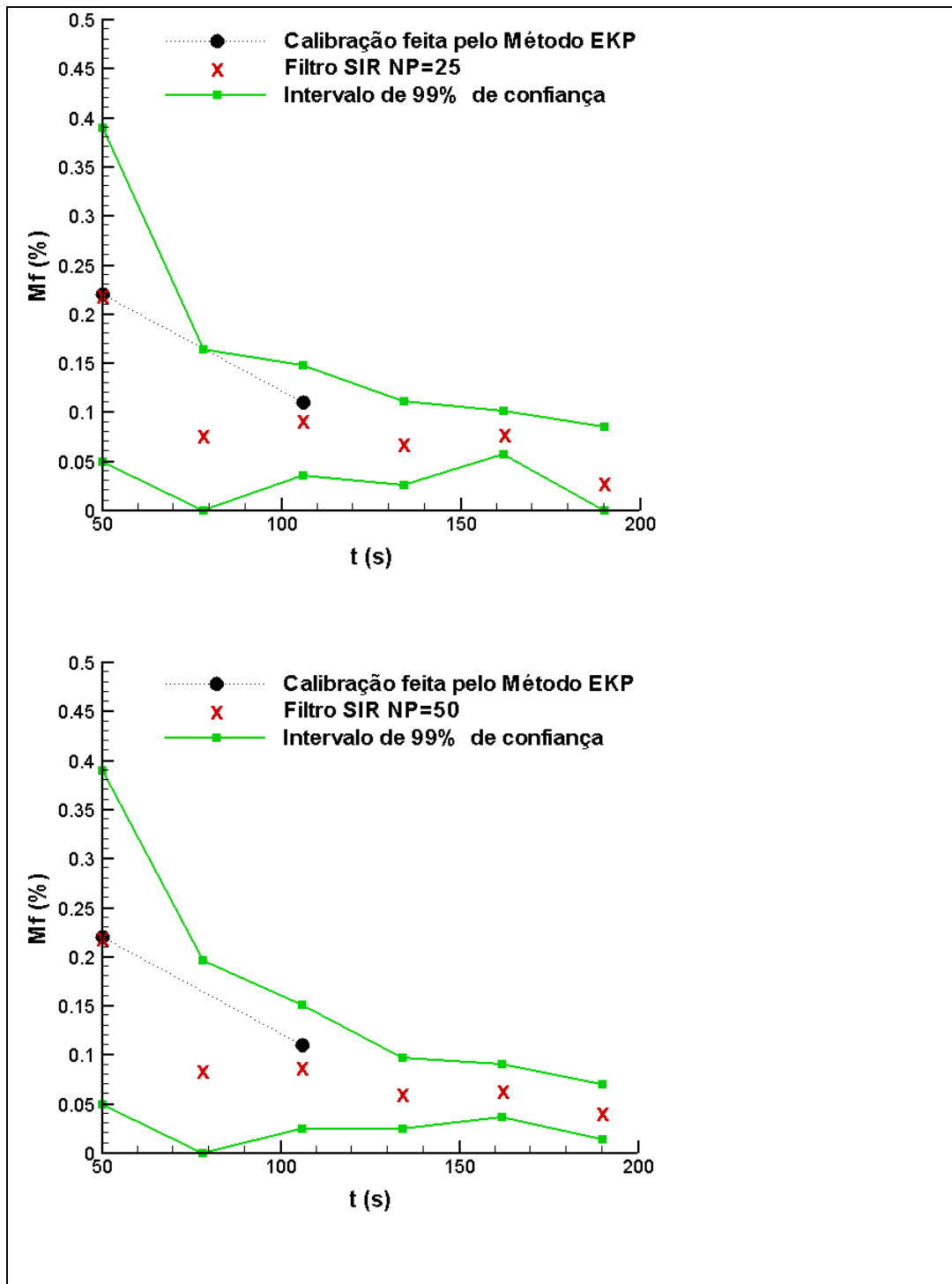
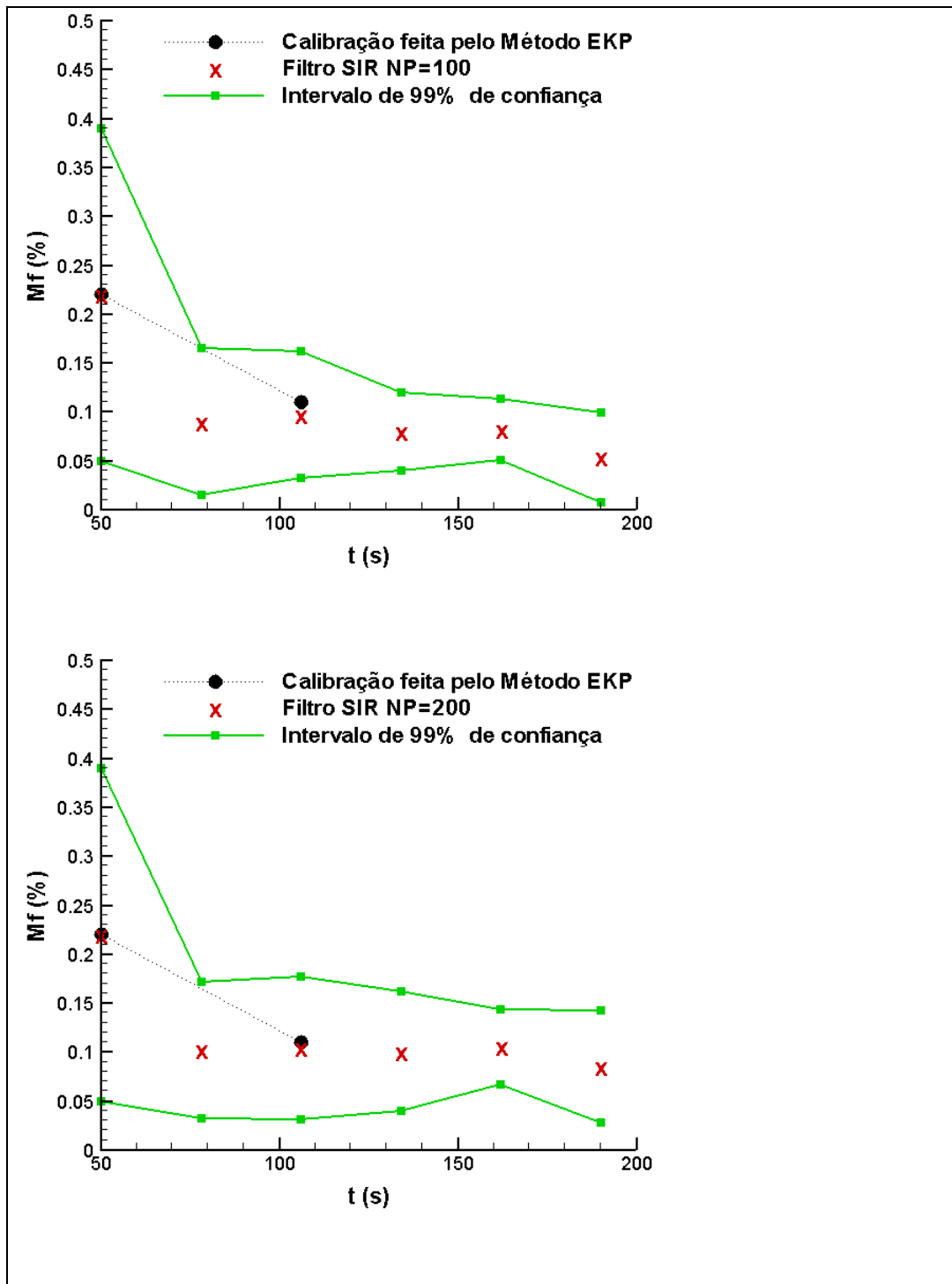
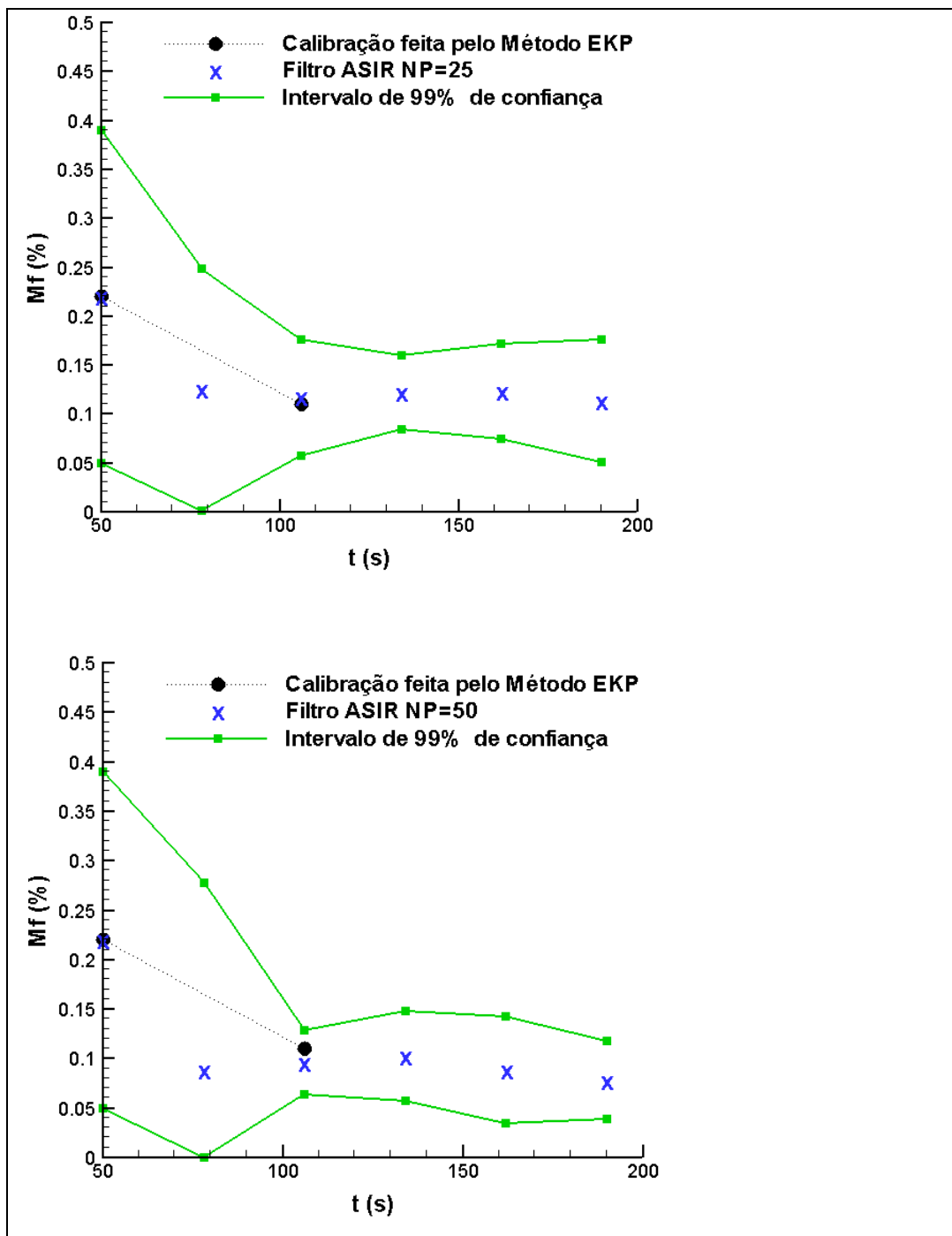


Figura 5.51: Resultado do filtro ASIR para a fronteira do fogo

A figura 5.52 mostra os resultados para o teor de umidade usando os filtros de partículas SIR e ASIR. Fica evidente que houve uma melhora significativa para todos os casos testados com a estimativa da magnitude da velocidade do vento, já que todos os casos testados apresentam valores próximos de 0.11 em cento e seis segundos. Nota-se também que para o filtro ASIR com 200 partículas tem-se um menor intervalo de confiança, se comparado com os outros casos testados.







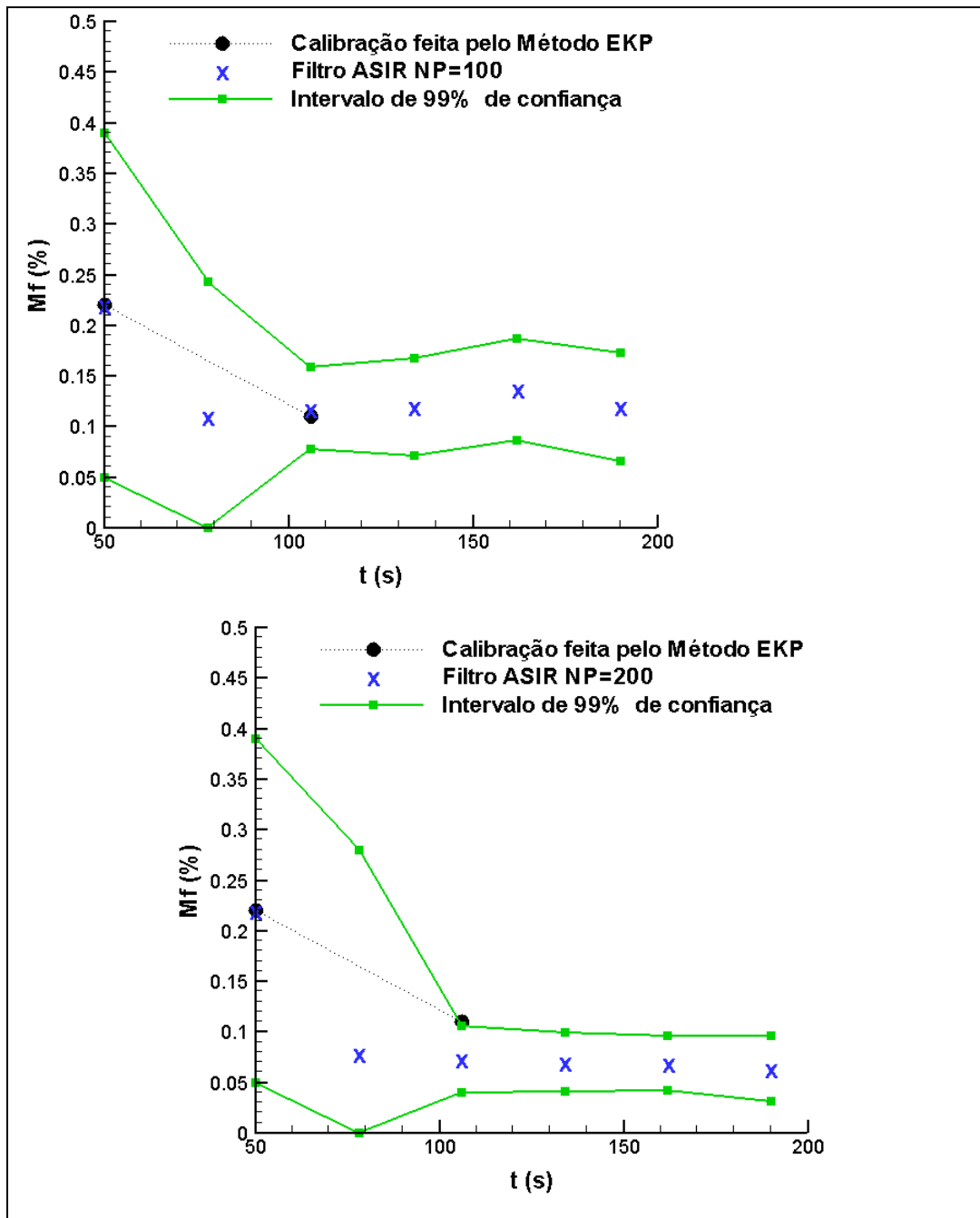
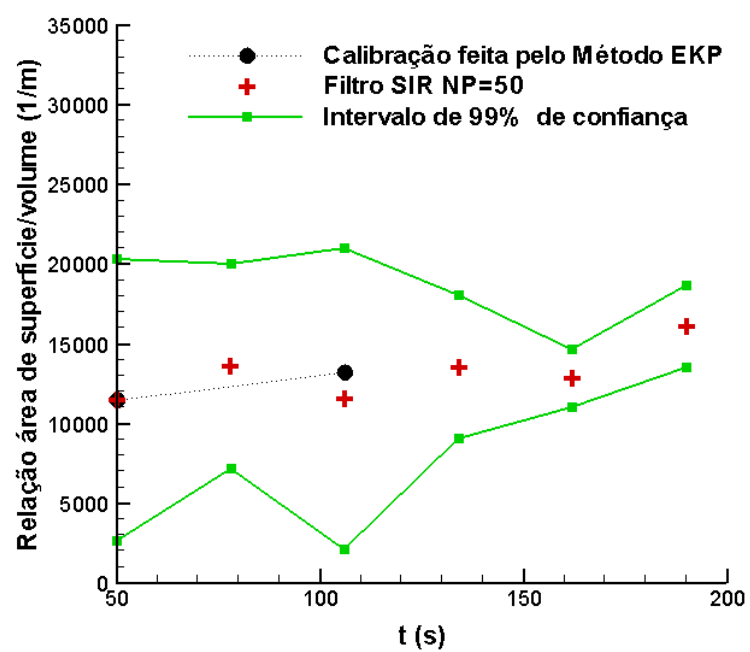
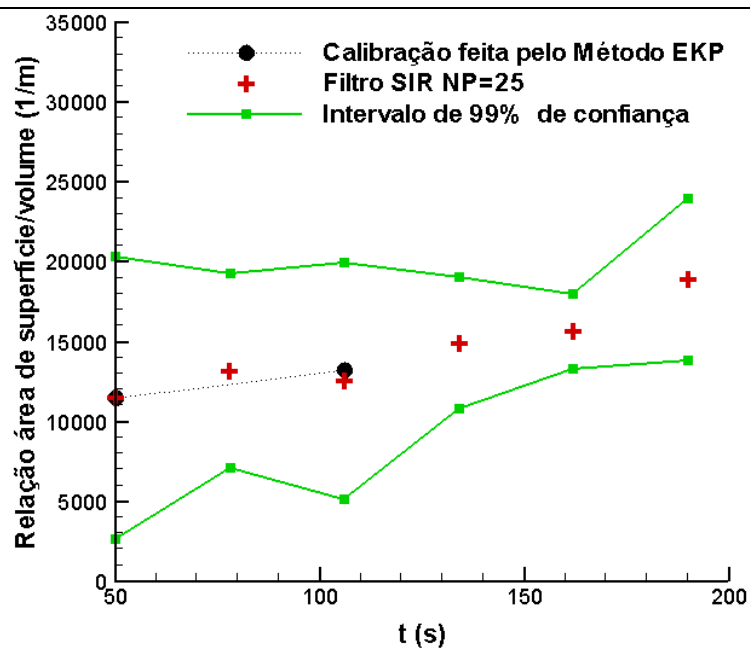
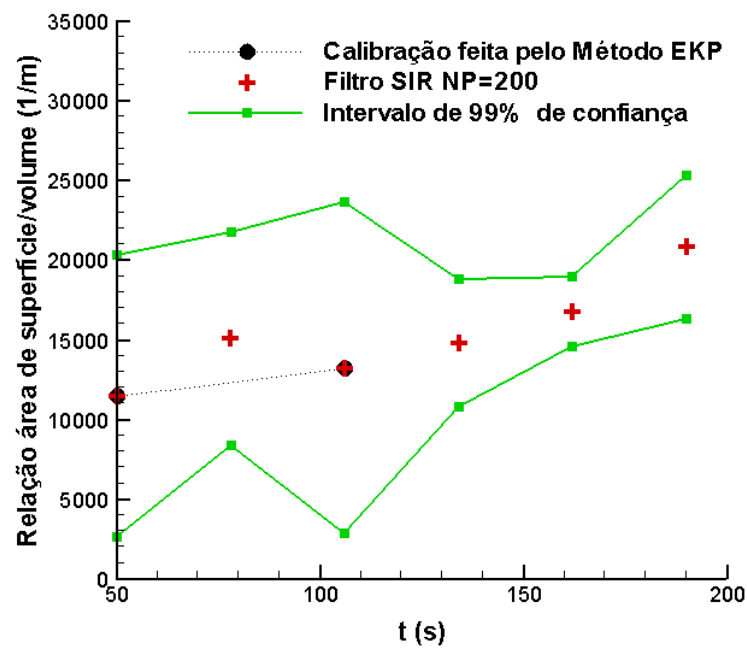
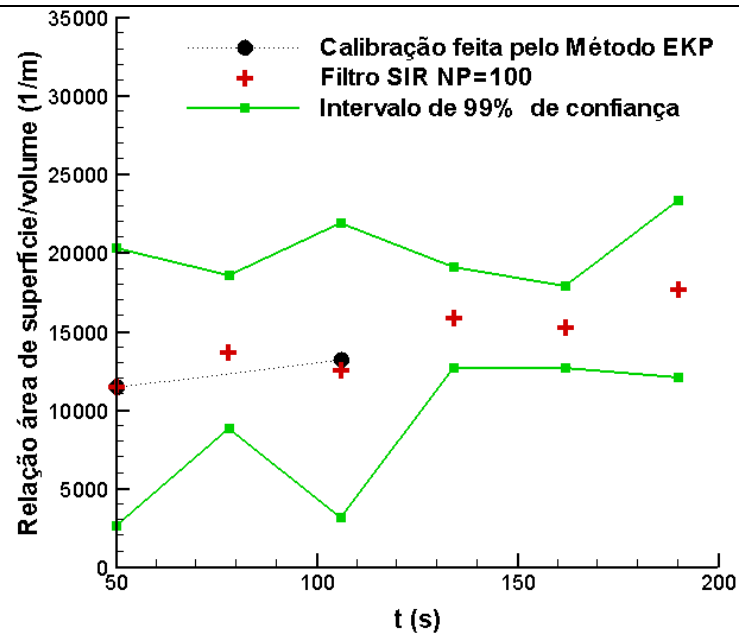
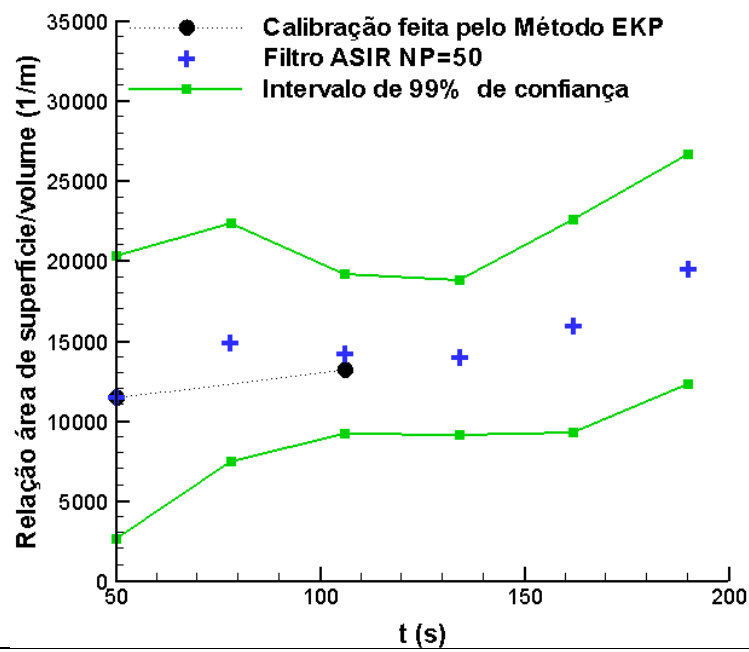
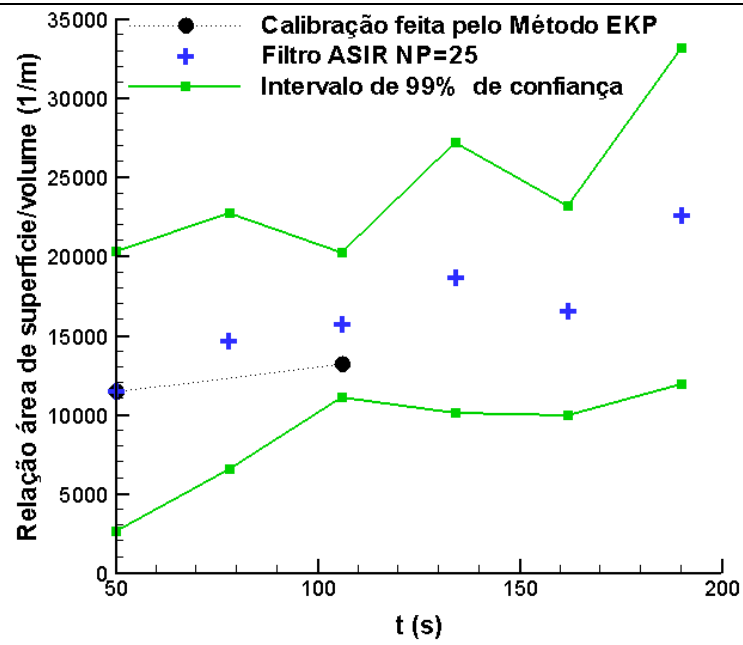


Figura 5.52: Resultado do filtro Bayesiano para o teor de umidade.

A figura 5.53 mostra os resultados para a relação superfície/volume usando os filtros de partículas. Nota-se que também houve uma melhora significativa nos resultados com a estimativa da magnitude da velocidade do vento, já que todos os casos testados apresentam valores próximos de 13193 m^{-1} até cento e seis segundos. Nesse caso o filtro SIR com 50 partículas apresenta o menor intervalo de confiança.







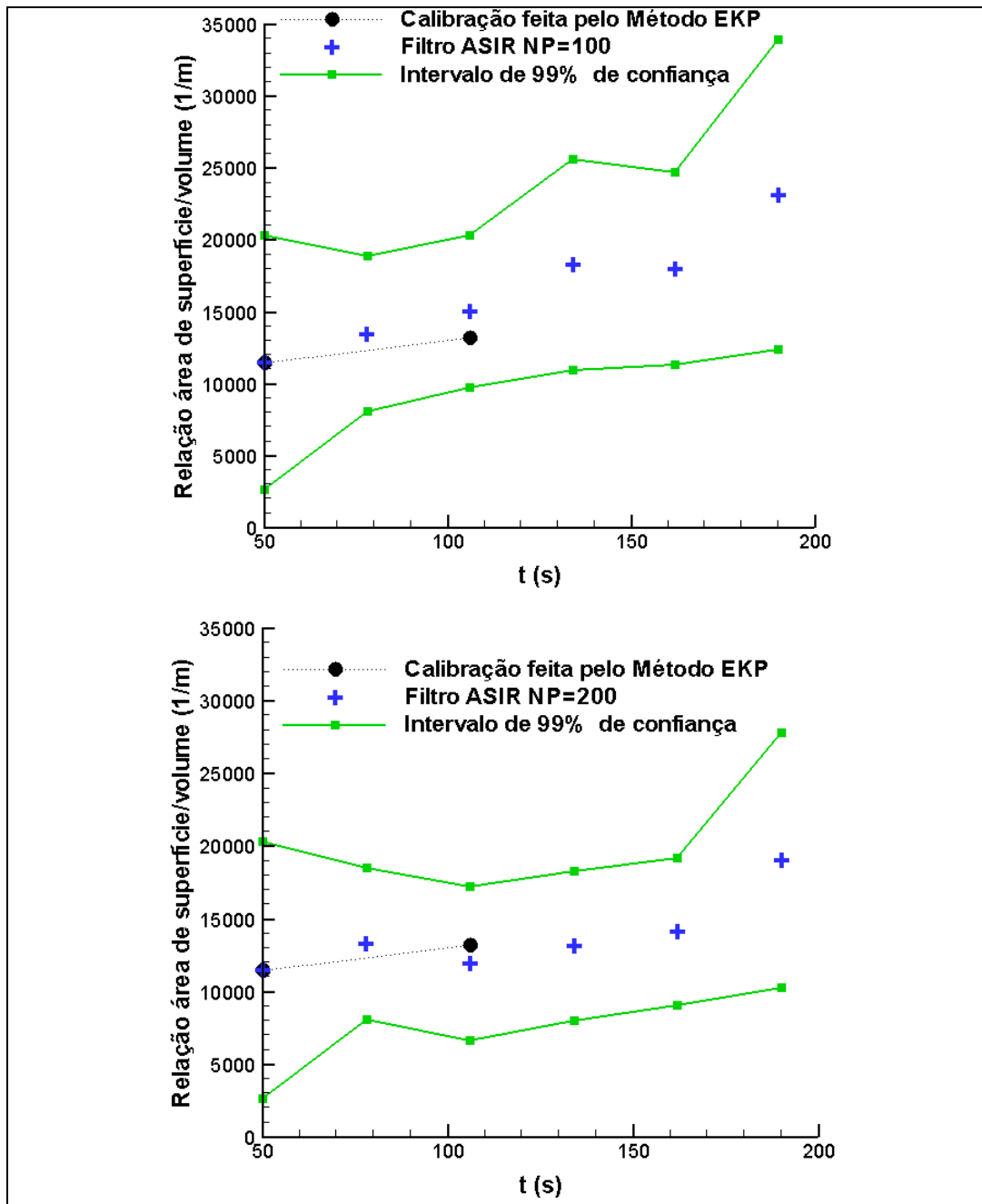
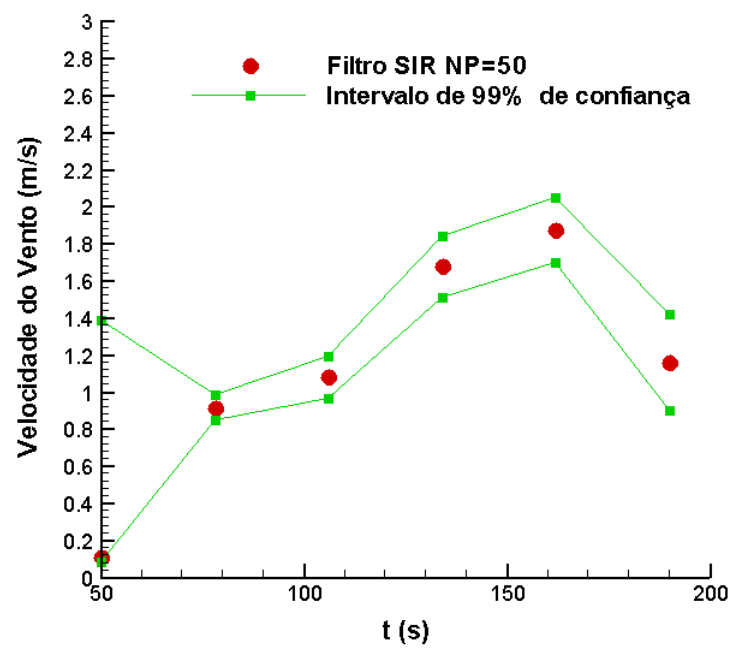
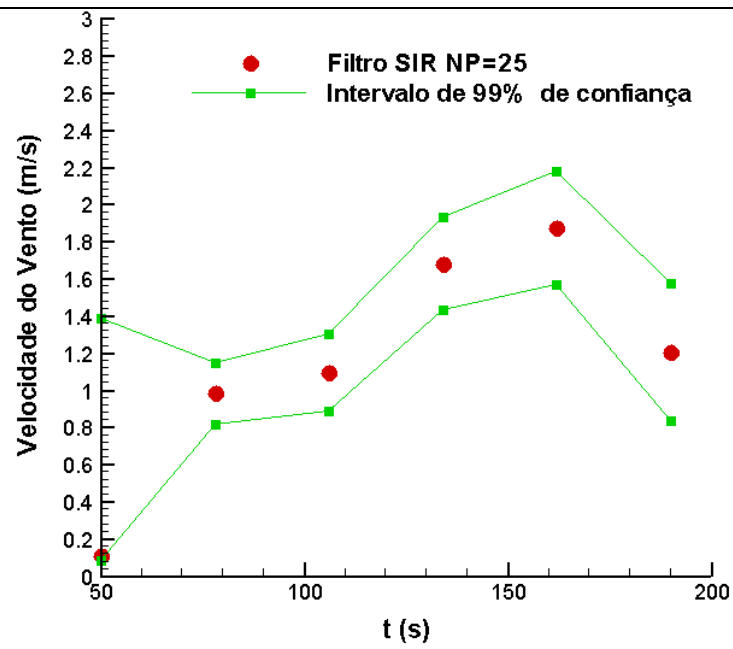
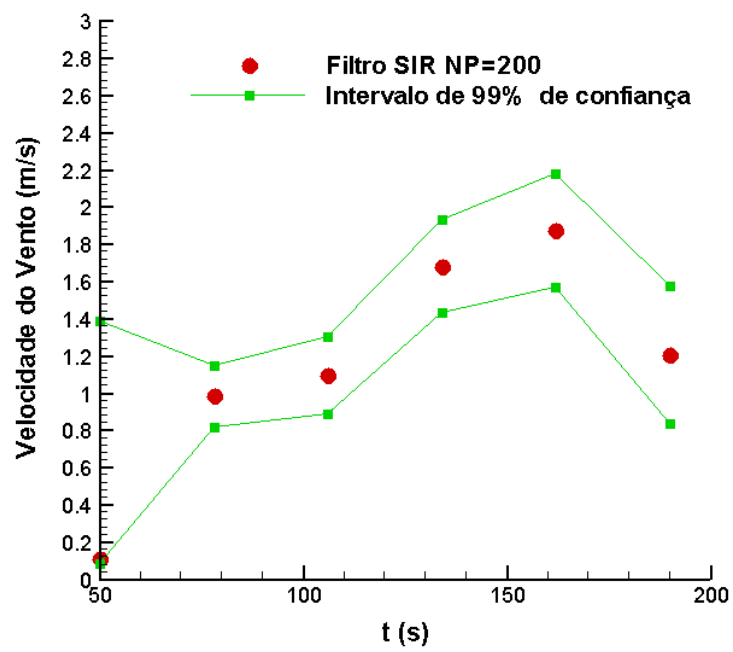
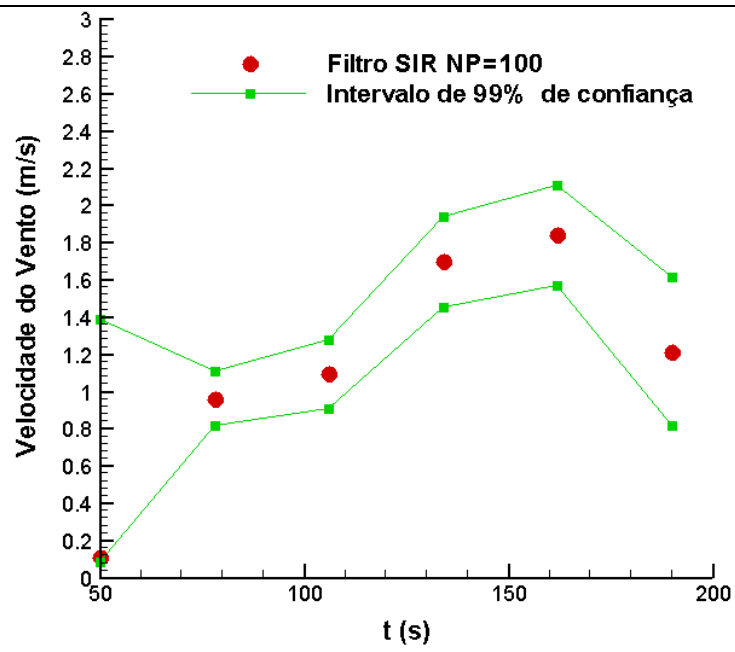
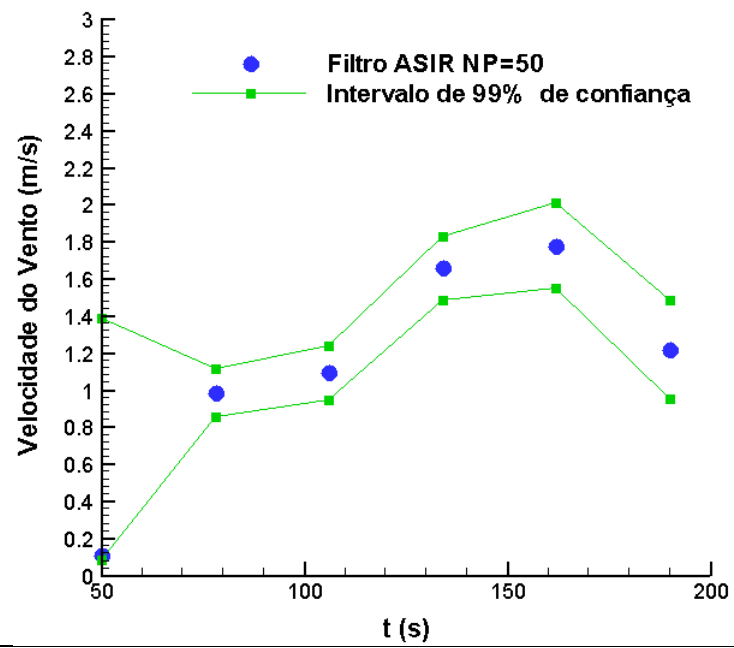
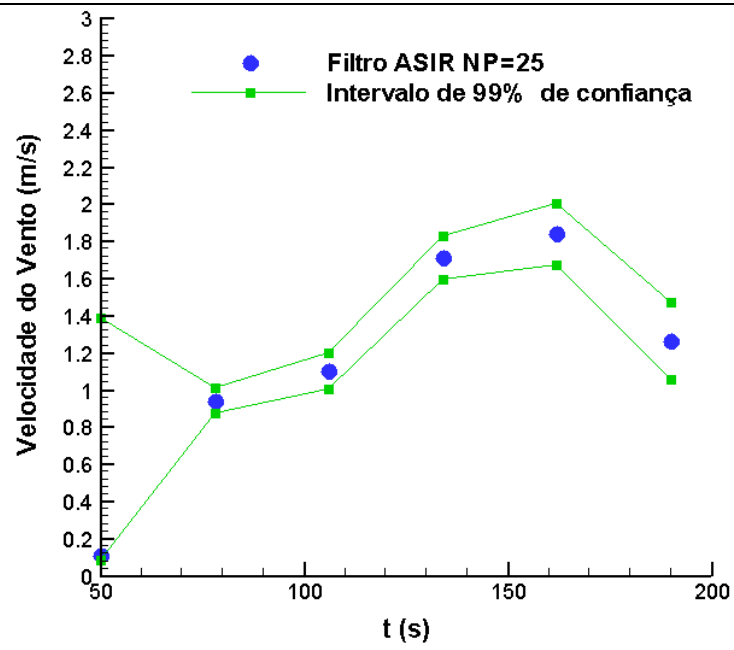


Figura 5.53: Resultado do filtro Bayesiano para a relação superfície/volume

A figura 5.54 apresenta a estimação feita pelos filtros SIR e ASIR para a magnitude da velocidade do vento. Comparando as figuras 4.8 e 5.54, nota-se que todos os casos testes apresentam boas aproximações.







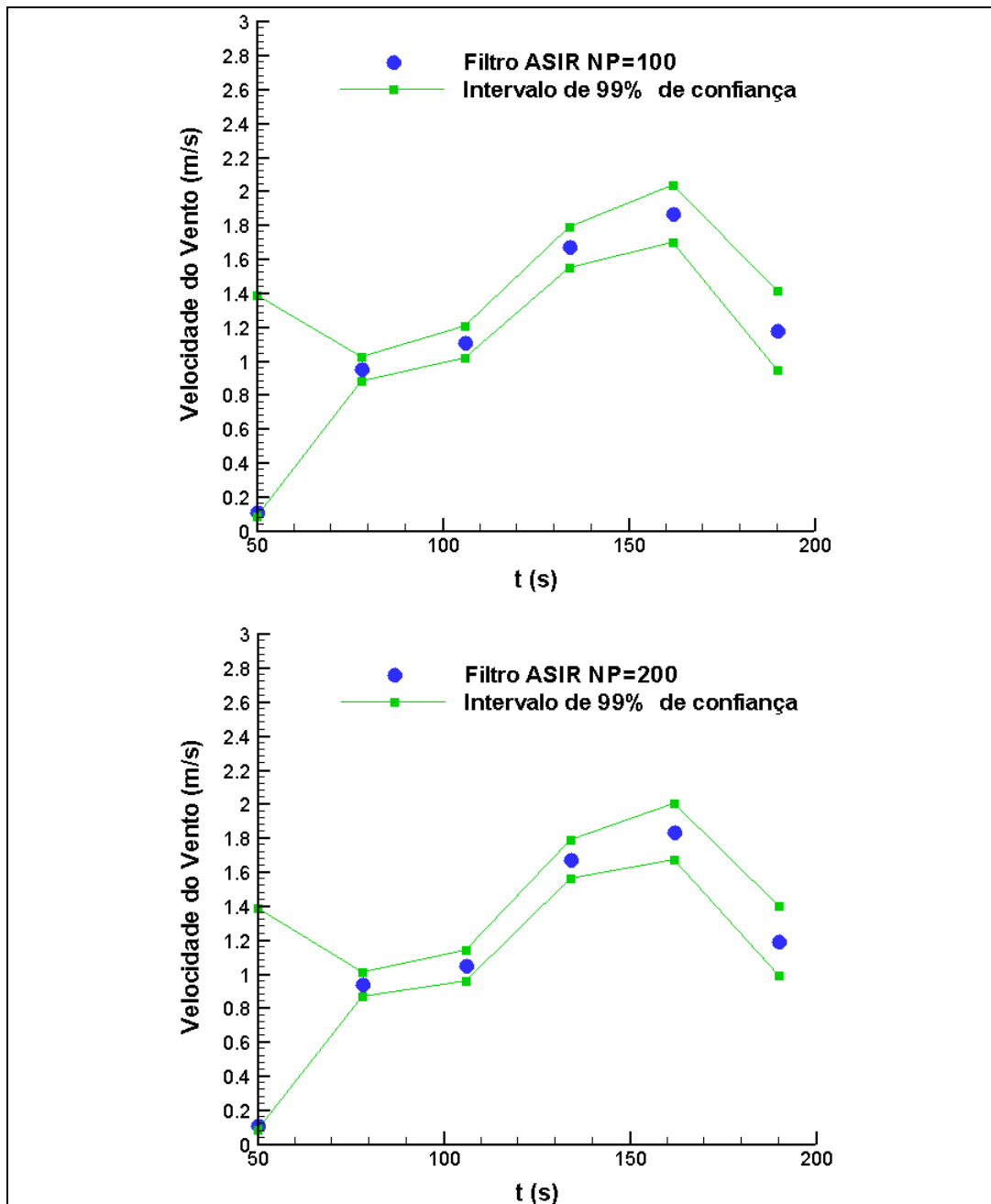
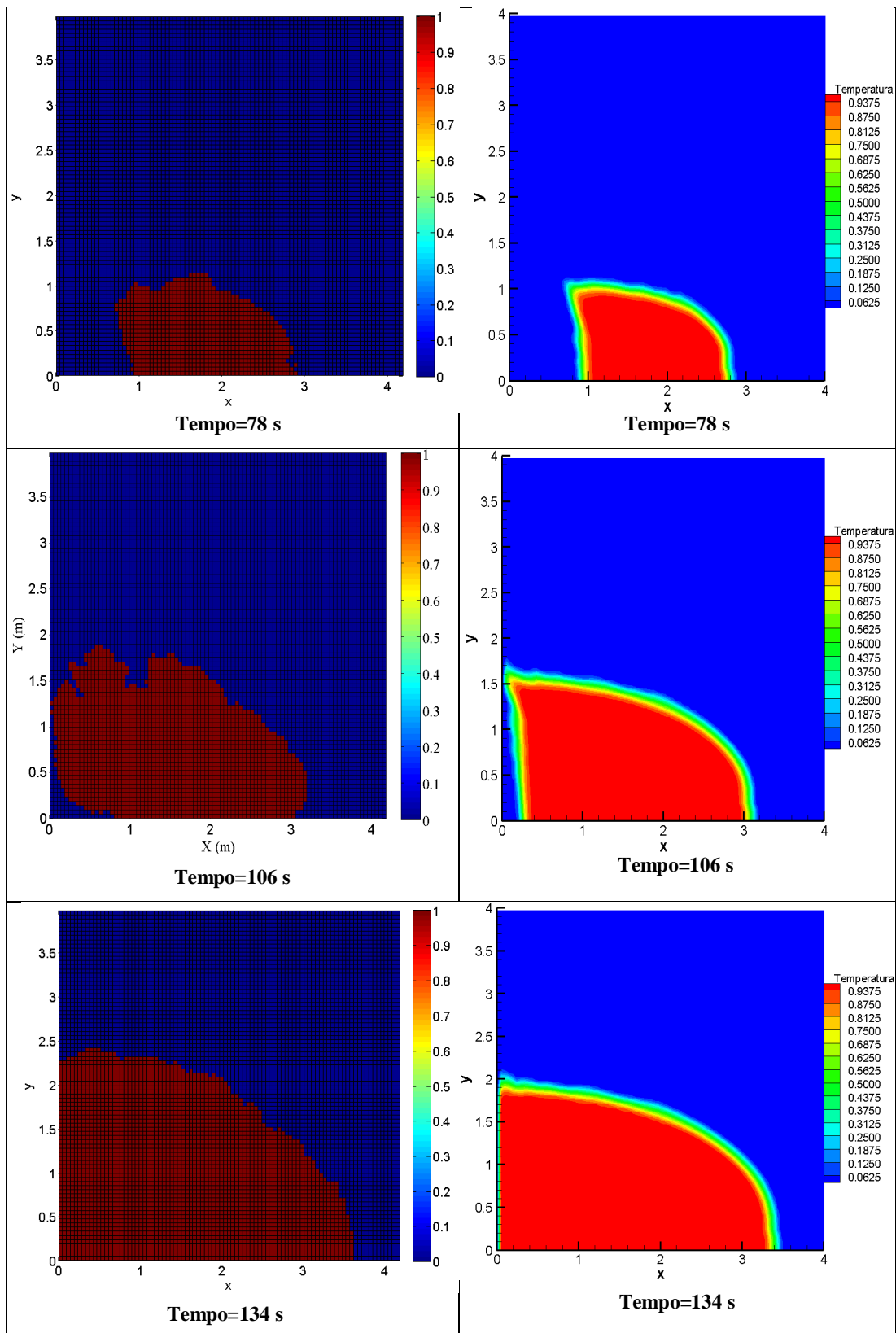


Figura 5.54: Resultado do filtro Bayesiano para a estimação da velocidade do vento.

A figura 5.55 apresenta a comparação da propagação do fogo estimada com filtro SIR com 200 partículas e os resultados medidos. Observando esta figura nota-se os excelentes resultados obtidos, embora tenha sido utilizado um código com um modelo simples para simular o incêndio, e que sejam grandes as incertezas sobre os parâmetros estudados.



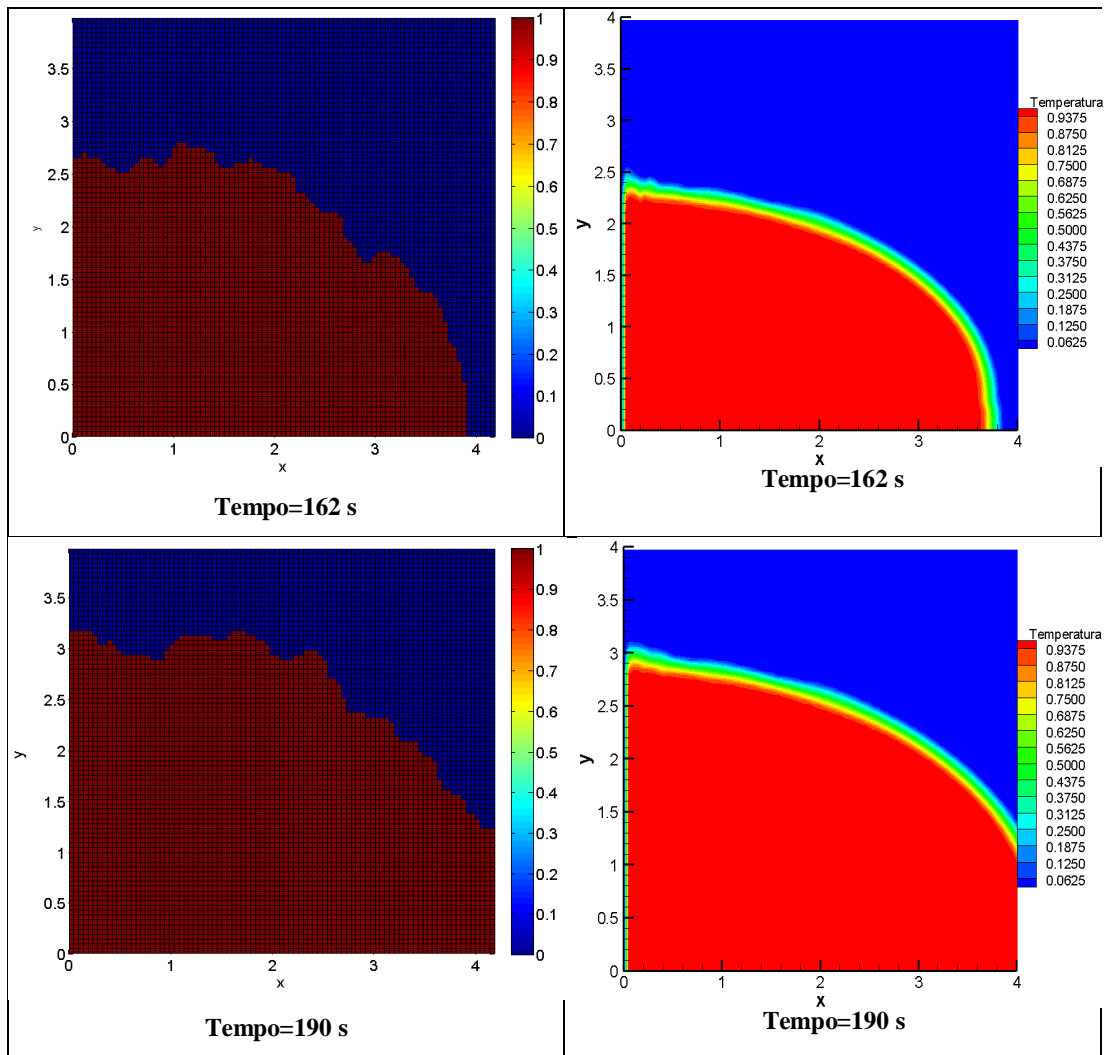
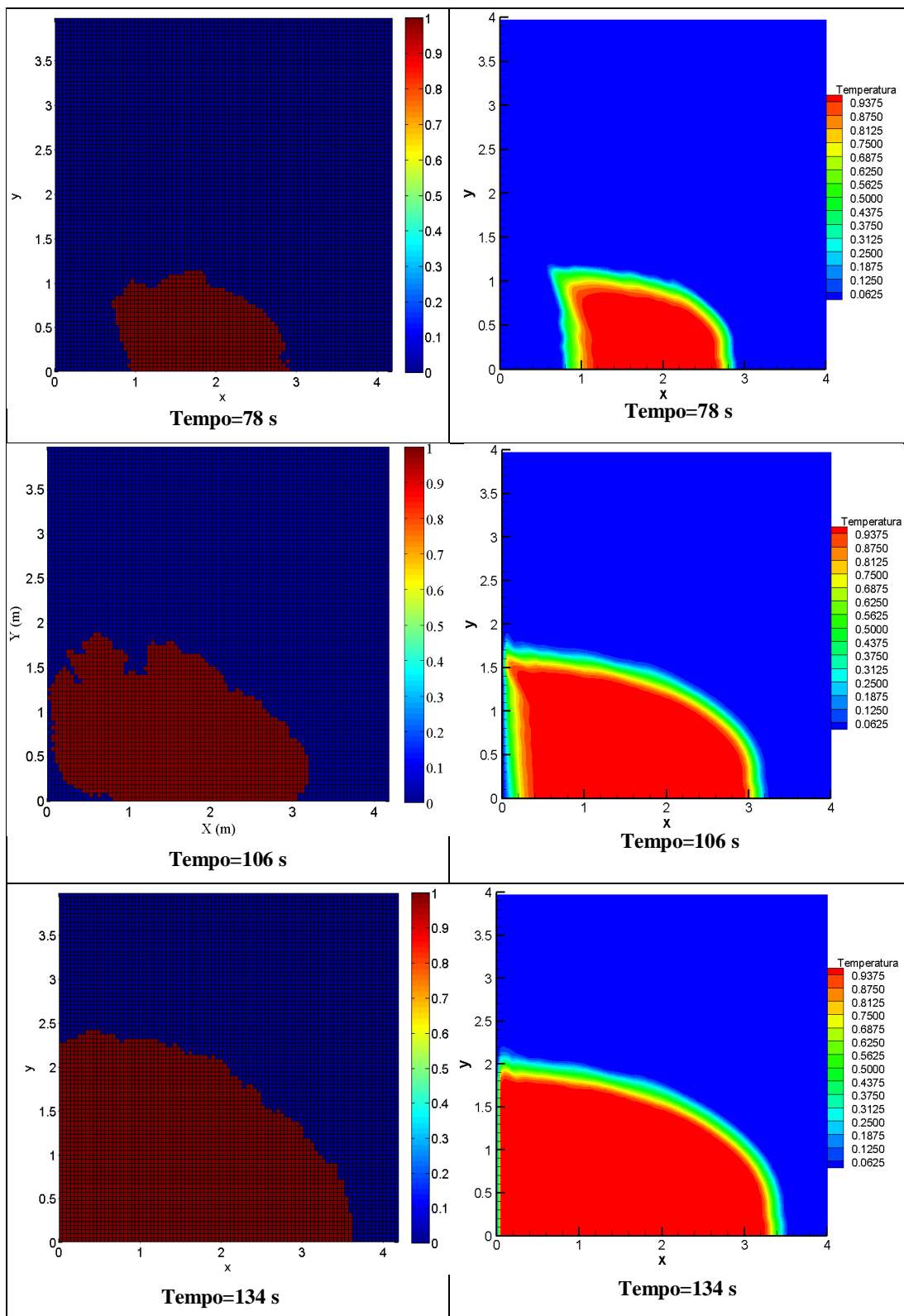


Figura 5.55: Comparação entre as dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro SIR=200.

A figura 5.56 apresenta a comparação dos resultados obtidos para a propagação do fogo utilizando o filtro ASIR com 50 partículas com os resultados medidos. Observando esta figura pode-se concluir que o filtro ASIR com quatro vezes menos partículas, apresenta uma estimacão tão boa quanto o filtro SIR com 200 partículas (ver figura 5.52).



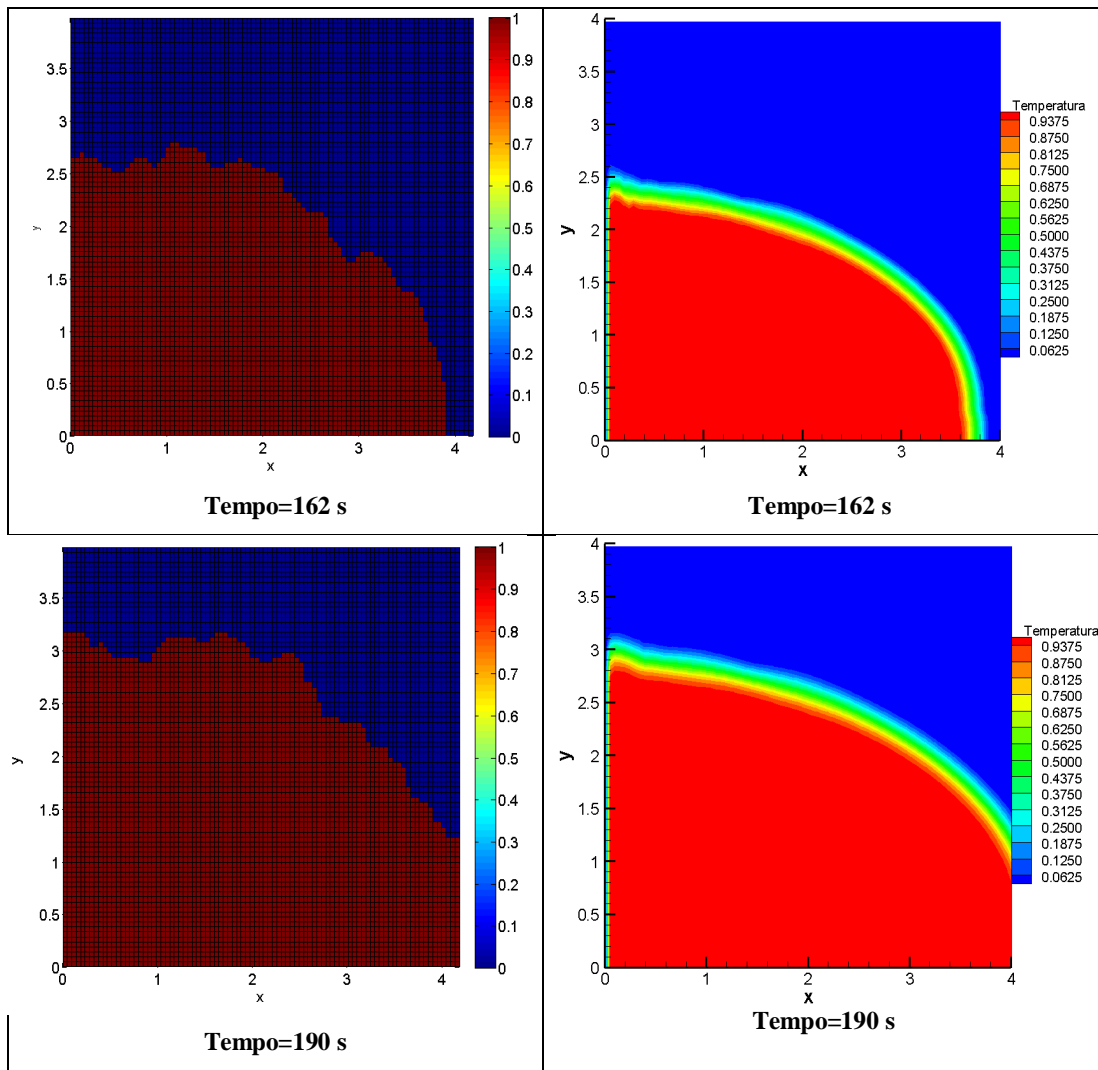


Figura 5.56: Comparação entre as dados reais (à esquerda) e os resultados obtidos (à direita) pelo filtro ASIR=50.

6 CONCLUSÕES

Atualmente muitas áreas da engenharia passaram a exercer novas atividades e começaram a ficar expostos a ambientes dinâmicos, onde não é mais possível prever e controlar as ações através dos programas e algoritmos que eram normalmente utilizados. Desta forma, foi necessário desenvolver novas metodologias para tratar dados de sensores (que além da informação principal trazem consigo um determinado nível de ruído) e processar em tempo real as informações que podem estar atrasadas. Enfim, esses novos programas ou algoritmos têm de tratar informações imperfeitas, reais, e mesmo assim devem ser robustos e viáveis.

O presente trabalho teve como objetivo introduzir algoritmos Bayesianos da classe de filtros de partículas em problemas de transferência de calor e combustão, como uma forma atrativa e confiável na resolução de problemas inversos. A idéia principal foi utilizar o conceito de estimativa de estado como um método não intrusivo para prever as fronteiras da chama, estimar a velocidade propagação e reconstrução do campo de temperatura de um incêndio a partir de medidas experimentais dadas por imagens infravermelhas feitas por um incêndio em um laboratório, levando em consideração incertezas provenientes do modelo de observação e do modelo de evolução.

Para tanto, foi utilizado um código em Fortran cedido pelo CERFACS, que adota um modelo simples para a propagação da chama em um campo. Este modelo foi usado para simular a evolução de um incêndio bidimensional em uma camada de superfície acima da terra, na qual baseia-se na equação de reação-difusão que integra as principais características de um incêndio, onde este modelo vai dar uma primeira visão sobre o comportamento da velocidade de frente da chama. Em termos das características de vegetação, tem-se os parâmetros que definem a velocidade de propagação do incêndio em referência. Para a estimação da velocidade de propagação local e a recuperação da evolução da chama utilizando o conceito de estimação de estado, foram utilizados o filtro de partículas SIR e o filtro ASIR.

O problema inverso da propagação de incêndio usando medidas experimentais dadas por imagens de termografia por infravermelho foi dividido em duas partes: na

primeira parte, o objetivo foi estimar a relação superfície/volume e o teor umidade do leito do combustível representado pelo efeito da vegetação uniforme, com uma frequência de medidas de 14 segundos. A segunda parte teve como objetivo estimar a relação superfície/volume, o teor umidade do leito do combustível e ajustar a velocidade do vento, com uma frequência de medidas de 28 segundos.

Após um minucioso estudo sobre o tema, foi possível concluir que os filtros apresentaram bons resultados para o problema de propagação de incêndio em um campo. Além disso, os filtros SIR e ASIR apresentaram desempenhos semelhantes para os desafios propostos, embora o filtro ASIR necessitasse de menos partículas, o que resulta em menor tempo computacional.

Observou-se ainda que os filtros de partículas revelaram que os valores de Rothermel, precisam ser estimados ou calibrados, a fim de melhorar os resultados. Esses métodos também mostraram que são capazes de estimar parâmetros em problemas complexos.

Para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho, foram encontrados alguns desafios, que servirão de base para a sugestão de trabalhos futuros. Sendo assim, são recomendados os seguintes tópicos listados abaixo:

- a. Realizar a paralelização do problema de propagação de incêndio de modo a diminuir o tempo computacional, bem como atenuar problemas de falta de memória.
- b. Tentar ajustar as imagens dentro de um domínio, onde é possível visualizar todas as medidas, fato que não foi possível para tempos maiores que 106 segundos.
- c. Procurar ajustar ou otimizar a constante experimental C_f dado por Rothermel, a fim de melhorar o desempenho dos filtros bayesianos.
- d. Em relação aos filtros de partículas, o grande objetivo é tentar gerar resposta para os problemas em tempo real (online).

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABANTO – VALLE, C. A. “Métodos de Simulações Estocásticas em Modelos Dinâmicos não Lineares: Uma Aplicação em Modelos de Volatilidade”, Dissertação (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005 .
- ANDERSON, B.D.O., & J.B. MOORE, 1979: Optimal Filtering. Prentice-Hall, 357 pp.
- ANDERSON, TANNHILL E PLETCHER, Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, *Hemisphere Publishing Corporation*, New York, 1984.
- ANDRIEU, C. AND DOUCET, A. (2002). Particle filtering for partially observed Gaussian state space models. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* 64 827-836.
- ANDRIEU, C., DOUCET, A., SUMEETPAL, S., TADIC, V., 2004, Particle methods for charge detection, system identification and control, *Proceedings of IEEE*, vol. 92, pp. 423-438.
- ARULAMPALAM, M. S., MASKELL, S., GORDON, N. AND CLAPP, T. “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking,” *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 50, no. 2, pp. 174–188, Feb. 2002.
- ARULAMPALAM, S. AND RISTIC, B. “Comparison of the particle filter with range parameterized and modified polar EKF’s for angle-only tracking,” *Proc. SPIE*, vol. 4048, pp. 288–299, 2000.
- BECK, J. V., BLACKWELL, B., e HAJI-SHEIKH, A., 1996, “Comparison of some inverse heat conduction methods using experimental data”, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, No 17, pp. 3649-3657.
- BERGMAN, N., “Recursive Bayesian estimation: Navigation and tracking applications,” Ph.D. thesis, Univ., Sweden, 1999.
- BERNARDI, A. "Filtros de Kalman no levantamento de características do Sinal de EEG". Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 1999.
- BREIMAN, L. (1992). *Probability*, Philadelphia: SIAM.

- CARPENTER, J., CLIFFORD, P., AND FEARNHEAD, P. “Improved particle filter for nonlinear problems,” *Proc. Inst. Elect. Eng., Radar, Sonar, Navig.*, 1999.
- CHEN R. e LIU J.S. 1996. Predictive updating methods with application to Bayesian classification. *Journal of the Royal Statistical Society B* 58: 397–415.
- CHEN T., MORRIS J. AND MARTIN E., Particle Filters for State and Parameter Estimation in Batch Processes, *Journal of Process Control*. 15 (2005), 665-673.
- CHOPIN, N. Central Limit Theorem for Sequential Monte Carlo Methods and Its Application to Bayesian, *The Annals of Statistics*, Vol. 32, No. 6 (Dec., 2004), pp. 2385-2411.
- COLAÇO, M. J e DULIKRAVICH, Solidification of Double-Diffusive Flows using Thermo-Magneto-Hydrodynamics and Optimization, *Materials and Manufacturing Processes*, 22: 594-606, 2007.
- COLACO, M. J. ; ORLANDE, H. R. B. ; SILVA. W. B. ; DULIKRAVICH, G. S . Application of a Bayesian Filter to Estimate Unknown Heat Fluxes in a Natural Convection Problem.. In: *ASME International Design Engineering Technical Conference & Computers and Information in Engineering Conference*, 2011, Washington.
- COLACO, M. J. ; ORLANDE, H. R. B. ; SILVA. W. B.; DULIKRAVICH, G. S. Application of Two Bayesian Filters to Estimate Unknown Heat Fluxes in a Natural Convection Problem. *Journal of Heat Transfer*, 2012.
- CRISAN, D. AND DOUCET, A. (2000) Convergence of sequential Monte Carlo methods. *Technical report*, University of Cambridge, CUED/F-INFENG/TR381.
- CRISAN D, AND DOUCET A.,” Convergence of Sequential Monte Carlo Methods” *Technical Report CUED/F-INFENG/TR381*, Cambridge Univ, 2002.
- GAMERMAN, D. Markov Chain Monte Carlo - Stochastic Simulation for Bayesian Inference, *First edition*, Chapman & Hall, 1997
- DEL MORAL, P., DOUCET, A. AND JASRA, A. An adaptive Sequential Monte Carlo Method for Approximate Bayesian Computation, Preprint, 2008.
- DEL MORAL, P., A. DOUCET, AND A. JASRA (2006). Sequential Monte Carlo samplers. *J. R. Statist. Soc. B* 68, 411 – 436.

- DELMOTTE, B., RICCI, S., MASSART, S., PAOLI, R., CUENOT B. AND TROUVÉ A., Parameter Calibration Using Data Assimilation for Simulation of Forest Fire Spread, Technical Report (2011), CERFACS/CNRS URA-1875.
- DOUCET A., “On sequential Monte Carlo methods for Bayesian filtering,” Dept. Eng., Univ. Cambridge, UK, Tech. Rep., 2008.
- DOUCET, A., DE FREITAS, J.F.G., GORDON, N.J., 2001. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. *Springer*, New York.
- DOUCET, A., GODSILL, S. J. AND ANDRIEU, C. (2000) On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statist. Comp.*, 10, 197–208.
- DOUCET A., JOHANSEN A. M. (2009) A tutorial on particle filtering and smoothing: Fifteen years later. In Oxford Handbook of Nonlinear Filtering, D. Crisan and B. Rozovsky (eds.). *Oxford Univesity Press*.
- FORTUNA, A. O., Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos básicos e aplicações, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- FOX, W. R., MCDONALD, A. T., Introdução à mecânica dos fluídos, 5. ed. Rio de janeiro: LTC, 1998.
- FRANDSEN, W. H. Fire spread through porous fuels from the conservation of energy. *Combustion and Flame*, v. 16, n. 1, p. 9-16, 1971. 47, 105
- GAMERMAN, D., 1996, Simulação Estocástica via Cadeias de Markov, Associação Brasileira de Estatística, Rio de Janeiro.
- GORDON, N., SALMOND, D. AND SMITH, A. F. M. “Novel approach to nonlinear and non-Gaussian Bayesian state estimation,” *Proc. Inst. Elect. Eng.*, F, vol. 140, pp. 107–113, 1993.
- GU Y. AND VELOSO M., "Learning Tactic-Based Motion Models of a Moving Object with Particle Filtering", *Proceedings of the 7th IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation*, CIRA 2007, 20-23 June 2007, Jacksonville, Florida, USA. IEEE 2007.
- HAMMERSLEY, J. M. e HANSCOMB, D. C., Monte Carlo Methods, London: *Chapman & Hall*, 1964.

- HARRISON, P. J. e STEVENS, C. F. (1976). Bayesian forecasting (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 38: 205{247.
- HIGDON, D. M. “Auxiliary variable methods for Markov chain Monte Carlo with applications,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 93, pp. 585–595, 1998.
- HAMILTON, F. C. ; CARVALHO, R. N. ; COLAÇO, M. J. ; LEIROZ, A. J. L. . Heat Transfer Coefficient Estimation of an Internal Combustion Engine using Particle Filters. In: EngOpt 2012 3rd International Conference on Engineering Optimization, 2012, Rio de Janeiro. Proceedings of EngOpt 2012 3rd International Conference on Engineering Optimization, 2012.
- JASRA, A., A. DOUCET, STEPHENS, D.A., HOLMES, C.C., Interacting sequential Monte Carlo samplers for trans-dimensional simulation. *Computational Statistics & Data Analysis* 52 (2008) 1765 – 1791.
- KAPIO, J. e SOMERSALO, E., 2004, Statistical and Computational Inverse Problems, *Applied Mathematical Sciences* 160, Springer-Verlag.
- KALMAN, R. E. “A new approach to linear filtering and prediction problem” Trans. ASME, Ser. D, *J. Basic Eng.*, vol. 82, pp.34–45, 1960.
- KALMAN, R. E. “Nonlinear filters based on Taylor series expansion,” *Commu. Statist. Theory and Methods*, vol. 25, no. 6, pp. 1261–1282, 1996.
- KALOS, M. H. E WHITLOCK, P. A. Monte Carlo Methods. *John Wiley and Sons*, 1986.
- KERNSTEIN, A., ASHURST, W. e WILLIAMS, F. Field equation for interface propagation in an unsteady homogeneous flow field, *Physical Review*, Vol. 37:pp 2728-2731, 1988.
- KITAGAWA, G. (1996) Monte Carlo filter and smoother for non-gaussian, non-linear state space models. *J. Comp. Graph. Statist*, 5, 1–25.
- KLOEK, T. e VAN DIJK, H. K. (1978). Bayesian estimates of equation system parameters: an application of integration of Monte Carlo. *Econometrica*, 46, 1–20.
- KONG A., LIU J.S., e WONG W.H. Sequential imputations and Bayesian missing data problems. *Journal of the American Statistical Association* 89: 278–288, 1994.

- KUCK H., FREITAS, N. AND DOUCET, A. SMC samplers for Bayesian optimal nonlinear design, *Nonlinear Statistical Signal Processing Workshop (NSSPW)*, 2006.
- KUO, K. K. 1986. Principles of Combustion. *HOHN WILEY & SOND, INC.*
- LIU, J. S. E CHEN, R. Blind deconvolution via sequential imputation. *Journal of the American Statistical Association* 90: 567–576, 1995.
- LIU, J. S. E CHEN, R. “Sequential Monte Carlo methods for dynamical systems,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 93, pp. 1032–1044, 1998.
- LIU, J. AND M. WEST, 2001, Combined parameter and state estimation in simulation - based filtering, in *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, *Eds. New York: SpringerVerlag*, 197-217.
- LIU, J. S. AND CHEN, R. “Sequential Monte Carlo methods for dynamical systems,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 93, pp. 1032–1044, 1998.
- LIU, J. S. Monte Carlo Strategies in Scientific Computing, Berlin: *Springer*, 2001.
- LIU, J. S. AND CHEN, R. AND WONG, W. H. “Rejection control and sequential importance sampling,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 93, pp. 1022–1031, 1998.
- LIU, J. S. AND CHEN, R. “Sequential Monte Carlo methods for dynamical systems,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 93, pp. 1032–1044, 1998.
- MALLET, V., KEYES, D.E., e FENDELL, F.E. Modeling wildland fire propagation with level set methods. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 57:pp 1089-1101, 2009.
- MARSHALL, A., “The use of multi-stage sampling schemes in Monte Carlo computations,” in *Symposium on Monte Carlo Methods*, M. Meyer *Ed. New York: Wiley*, pp. 123–140, 1956.
- MAYBECK, P., 1979, Stochastic models, estimation and control, *Academic Press*, New York.
- METROPOLIS N., ROSENBLUTH A., ROSENBLUTH M., A. H. TELLER, AND E. TELLER, Equation of state calculations by fast computing machines, *Journal of Chemical Physics*, vol. 21, pp. 1087–1092, 1953.

- NICHOLAS ZABARAS, *Inverse Problems in Heat Transfer-Chapter 17*, Materials Process Design and Control Laboratory, Sibley School of Mechanical and Aerospace Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, USA
- ORLANDE, H. R. B., DULIKRAVICH, G. S. AND COLAÇO, M. J. “Application of Bayesian filters to heat conduction problems, *In: EngOpt 2008 - International Conference on Engineering Optimization*, 2008, Rio de Janeiro.
- ORLANDE, H. R. B. ; COLACO, M. J. ; DULIKRAVICH, G. S ; VIANNA, F. L. V. ; SILVA. W. B.; FONSECA, H. M. ; FUDYM, O. . Kalman and Particle filters. *In: METTI V - Thermal Measurements and Inverse Techniques*, 2011, Roscoff.
- ORLANDE, H. R. B. ; COLACO, M. J. ; DULIKRAVICH, G. S ; VIANNA, F. L. V. ; SILVA. W. B.; FONSECA, H. M.; FUDYM, O. . State Estimation Problems in Heat Transfer. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 2012.
- OSHER, O. e SETHIAN, J.A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 79:pp 12-49, 1988.
- ÖZISIK, M. N., Heat Conduction, *John Wiley & Sons*, New York, 1980.
- PETERS, G. W., FAN Y. AND SISSON, S. A. (2010), On sequential Monte Carlo, partial rejection control and approximate Bayesian computation, Submitted.
- PITT, M. AND SHEPHARD, N., “Filtering via simulation: Auxiliary particle filters,” *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 94, no. 446, pp. 590–599, 1999.
- PITT, M. AND SHEPHARD, N., “Auxiliary variable based particle filters,” in *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, A. Doucet, J. F. G. de Freitas, N. J. Gordon, Eds. Berlin: *Springer Verlag*, 2001.
- POINSOT, T. AND VEYNANTE, D. (2005), *Theoretical and Numerical Combustion*, 2nd edition, R. T. Edwards.
- REHM, R.G. e MCDERMOTT, R.J. Fire-front propagation using the level set method. Technical report, Ntional Institute of Standards and Technology, 2009.
- RUBEIRO, M.I. Kalman and Extended Kalman Filters: concept, derivation and properties. 2004.

- RISTIC, B., ARULAMPALAM, S., GORDON, N., 2004, Beyond the Kalman Filter, Artech House, Boston.
- ROTHERMEL, R.C., 1972, A Mathematical Model for Predicting Fire Spread in Wildland Fuels, Research Paper INT-115, US Department of Agriculture Forest Service.
- ROCHOUX, M., RICCI, S., MASSART, S., PAOLI, R., CUENOT B. AND TROUVÉ A., Preliminary Investigation of Data Assimilation Methodologies for Forest Fire Propagation, Technical Report TR-CMGC-10-99 (2010), CERFACS/CNRS URA-1875.
- ROCHOUX, M.C., DELMOTTE, B., CUENOT, B., RICCI, S., TROUVÉ, A., 2012, “Regional-Scale Simulations of Wildland Fire Spread informed by Real-time Flame Front Observations”, Proc. Combust. Inst., 34, in press, doi:10.1016/j.proci.2012.06.090
- RUBIN, D. B. “The Calculation of Posterior Distributions by Data Augmentation: Comment: A Noniterative Sampling/Importance Resampling Alternative to Data Augmentation Algorithm for Creating a few Imputations When Fractions of Missing Information Are Modest: The SIR Algorithm,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 82, N0.398 (Jun., 1987), 543-546.
- SERO-GUILLAUME, O. MARGERIT, J. Modelling forest fires. PartI: a complete set of equations derived by extended irreversible thermodynamics, *Int. J. heat and Mass Transfert*, Vol. 45, 1705-1722, 0017-9310, 2002.
- SILVA. W. B. ; ORLANDE, H. R. B. ; COLACO, M. J. . Evaluation of Bayesian Filters Applied to Heat Conduction Problems. *In: 2nd International Conference on Engineering Optimization*, 2010, Lisboa.
- SILVA. W. B. ; ORLANDE, H. R. B. ; COLACO, M. J. ; FUDYM, O. . Application of Bayesian Filters to a One-Dimensional Solidification Problem.. *In: 21st Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, 2011, NATAL.
- SILVA. W. B. ; ORLANDE, H. R. B. ; COLACO, M. J. ; FUDYM, O. ; EL HAFI, Mouna. ; CUENOT Bénédicte ; ROCHOUX Mélanie. Application des filtres de particules à l'estimation de la vitesse de propagation d'incendies. *In: congrès Français de Thermique*, 2012, Bordeaux. congrès Français de Thermique, 2012.

- SISSON, S. A., FAN, Y. AND TANAKA M. M. (2007). Sequential Monte Carlo without likelihoods. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 104, 1760–1765. Errata (2009).
- SMITH, A. F. M. AND WEST, M. (1983). Monitoring renal transplants: Na application of the multi-process Kalman Filter, *Biometrics* 39: 867-878.
- SPALDING, D. B.. Mixing and chemical reaction in steady confined turbulent flames. In 13th Symp. (Int'l). om Combustion The Combustion Institute, 1970.
- WANG J AND ZABARAS N 2004 A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *Int. J. Heat Mass Transfer* 47, 3927–3941
- WANG J AND ZABARAS N 2005 Using Bayesian statistics in the estimation of heat sources in radiation *Int. J. Heat. Mass Transfer* 48, 15–29
- WANG J AND ZABARAS N 2006 A Markov random field model of contamination source identification in porous media flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* 49, 939–950
- WANG J AND ZABARAS N, Hierarchical Bayesian models for inverse problems in heat conduction, *Inverse Problems* 21 (2005) 183–206.
- WEBER, R. O. Toward a comprehensive wildfire spread model. *Internation Journal os Wildland Fire*, Vol. 4:pp 245-248, 1991
- WELCH, G., BISHOP, G., “An Introduction to Kalman Filter”, TR 95-041, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill, *Chapel Hill*, NC 27599-3175, Abril 2004,. ou <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>. Acesso em 01 Jun 2004.
- WEST, M. (1993a) Approximating posterior distributions by mixture. *J. R. Statist. Soc. B*, 55, 409–422.
- WEST, M. (1993b). Mixture models, Monte Carlo, Bayesian updating and dynamic models, in J. H. Newton (ed.), *Computing Science and Statistics: Proceedings of the 24th Symposium on the Interface, Interface Foundation of North America*, Fairfax Station, Virginia, pp. 325-333.
- WEST, M. AND HARRISON, P. J. (1997). Bayesian Forecasting and Dynamic Models, 2nd edn, *Springer-Verlag*, New York.
- WILLIAMS, F. A. 1994. Combustion Theory: Second Edition. *Perseus Books*.

- WINKLER, R., 2003, An Introduction to Bayesian Inference and Decision, *Probabilistic Publishing*, Gainsville.
- WOOSTER, M.J., ROBERTS, G., PERRY, G., KAUFMAN, Y.J., 2005, Retrieval of biomass combustion rates and totals from fire radiative power observations: FRP derivation and calibration relationships between biomass consumption and fire radiative energy release, *Journal of Geophysical Research*, 110, D24311.
- VIANNA, F. L. V., ORLANDER, H. R. B., e DULIKRAVICH, G. S., Prediction of the temperature field in pipelines with Bayesian filters and non-intrusive measurements, *20th International Congress of Mechanical Engineering*, November 15-20, 2009, Gramado, RS, Brazil.
- VIANNA, F. L. V., ORLANDER, H. R. B., e DULIKRAVICH, G. S., Temperature field prediction of a multilayered composite pipeline based on the particle filter method, *Proceedings of the 14th International Heat Transfer Conference*, IHTC-14, August 8-13, 2010, Washington D.C., USA.
- VICTOR A. F. de CAMPOS, DOUGLAS D. S. SANTANA, CELSON M. FURUKAWA, NEWTON MARUYAMA, Filtros de partículas aplicados à estimação de trajetórias, Artigo submetido ao XV, Gramado 2004.
- VIEGAS, D.X., 2011, “Overview of Forest Fire Propagation Research”, *Proc. Intl. Assoc. Fire Safety Science*, 10, 95-108.
- ZARITSKII V.S., SVETNIK V.B., e SHIMELEVICH L.I.. Monte Carlo technique in problems of optimal data processing. *Automation and Remote Control* 12: 95–103, 1975.

Apêndice A

A.1 MODELO DE ROTHERMEL

Existem diferentes tipos de modelos de simulação de fogos florestais que poderão basear-se em deduções empíricas ou provirem de modelos físicos de grande complexidade. Não existe uma grande diferença entre os resultados obtidos pelos diferentes tipos de modelos, sendo que o primeiro tipo (deduções empíricas) pode derivar do segundo por redução através de uma análise assintótica (SÉRO-GUILLAUNE ET AL., 2002).

O modelo de Rothermel, derivado do modelo empírico de Frandsen, tem vindo a ser um dos modelos mais estudados e adaptados pelos diversos pesquisadores da área, tratando-se de uma compilação de inúmeros pioneiros na temática dos incêndios florestais.

O modelo de Frandsen (1971) para a determinação da velocidade de propagação do fogo esta na equação (A.1). Em sua análise, a frente do fogo é vista como fixa no espaço e o elemento de volume, posicionado inicialmente em $x=-\infty$, move-se com velocidade constante em direção à frente da chama que esta posicionada em $x=0$. O elemento de volume possui espessura constante z_c , recebe calor emitido pela frente do fogo e alcança entra em ignição. A partir desta análise, Frandsen obteve a seguinte expressão:

$$R = \frac{I_{xig} + \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial I_z}{\partial z} \right) dx}{\rho_{be} Q_{ig}} \quad (A.1)$$

Em que:

R - velocidade de propagação do fogo;

I_{xig} - fluxo de calor horizontal absorvido por uma unidade de volume de combustível durante o tempo de ignição ($J m^{-2} s^{-1}$)

$\left(\frac{\partial I_z}{\partial z} \right)_{z_c}$ - gradiente do fluxo vertical de calor que o volume recebe da frente do fogo.

ρ_{be} - é a densidade volumétrica efetiva (quantidade de combustível que é levado à ignição por volume unitário do leito do combustível)

Q_{ig} - é o calor de pré-ignição (calor necessário para conduzir uma unidade de massa de combustível até a ignição)

A equação A.1 mostra que a velocidade de propagação do fogo é a razão entre o fluxo de calor recebido da frente do fogo e o calor necessário para a ignição do combustível. A equação A.1 não possui uma solução analítica, devido os mecanismos de transferência de calor dos termos fluxos de calor recebido da frente da chama serem desconhecidos. Através da utilização de métodos experimentais e analíticos cada termo da equação A.1 foi analisado e estimativas foram obtidas, além disso, novos termos foram definidos para proverem uma solução aproximada. Onde esta solução foi apresentada por Rothermel's (1972), resultante de anos de pesquisa conduzida pelo Serviço Florestal dos Estados Unidos, junto com Northern Forest Fire Laboratory, onde propõe um modelo para estimar a velocidade de propagação do fogo baseados em estudos teóricos desenvolvidos anteriormente por Frandsen (1971). Aplicando o princípio da conservação da energia a um elemento de volume do leito do combustível adiante da frente do fogo. Nesta formulação, o volume de controle da região não queimada, ROS ao longo da direção normal \vec{n} da fronteira é dado pelo razão entre a energia propagada do combustível não queimado I_p e energia necessária para a ignição do combustível $\rho_b \varepsilon Q_{ig}$. Através do uso de métodos experimentais e analíticos a equação de Frandsen pode ser estimada pela seguinte expressão, proposta por Rothermel (1972):

$$R = \frac{I_p}{\rho_b \varepsilon Q_{ig}} \quad (A.2)$$

Onde:

- I_p ($J/m^2/s$), o fluxo de propagação.

- ρ_b (kg/m³), é a densidade dos meios porosos, não é a densidade da fase sólida do meio.
- ϵ , é o número de aquecimento efetivo, a proporção de partículas de combustível que são aquecidas até a temperatura de ignição,
- Q_{ig} (kJ/kg), é o calor de pré-ignição;

A.1.1 Propagação do fogo sem vento e sem condições do terreno (elevação)

Neste caso o fluxo de propagação I_p pode ser expresso com a proporção da reação de intensidade I_R , isto é, taxa de energia emitida dos gases da combustão liberada da matéria orgânica do combustível:

$$I_p = \xi I_R \quad (A.3)$$

Onde, ξ é o coeficiente que representa a porcentagem da intensidade de reação que aquece as partículas de combustível adjacentes à zona de reação. E ROS é dado por R_0 .

$$R_0 = \frac{\xi I_R}{\rho_b \epsilon Q_{ig}} \quad (A.4)$$

A.1.2 Propagação do fogo com vento e sem condições do terreno (elevação)

O vento e inclinação do terreno são importantes parâmetros da propagação do fogo. Para adicionar estas condições é introduzido Φ_w para representar o vento e Φ_s para as condições de elevação do terreno. Agora tem-se a formulação de ROS:

$$R = R_0 (1 + \phi_w + \phi_s) \quad (A.5)$$

Onde,

$$\phi_w = CU^B \left(\frac{\beta}{\beta_{op}} \right)^{-E} \quad (\text{A.6.a})$$

$$\phi_s = 5.275 * \beta^{-0.3} (\tan \varphi)^2 \quad (\text{A.6.b})$$

$$C = 7.47 * \exp(-0.133\sigma^{0.55}) \quad (\text{A.6.c})$$

$$B = 0.02526 * \sigma^{0.54} \quad (\text{A.6.d})$$

$$E = 0.715 * \exp(-3.59 * 10^{-4} \sigma) \quad (\text{A.6.e})$$

Onde U é a amplitude do vento na direção normal a frente do fogo, β é o quociente de compactação que quantifica a compactação do leito, β_{op} é o valor ótimo de β e φ é ângulo da inclinação do terreno.

Apêndice B

B.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DE CONDUÇÃO

Nessa seção será apresentado o Método Implícito de Diferenças Finitas (ANDERSON ET AL, 1984) para a discretização do problema de condução de calor dado pela equação (4.6 – 4.9). A idéia básica de qualquer método numérico consiste em se transformar um domínio contínuo em um problema discreto, com um número finito de pontos nodais. A solução é então obtida resolvendo-se um sistema de equações algébricas. No método de diferenças finitas a discretização é feita aproximando-se as derivadas das grandezas envolvidas por quocientes de diferenças dessas variáveis. Considerando o seguinte problema.

$$\frac{\partial^2 \Phi(X, \tau)}{\partial X^2} = \frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial \tau} \quad 0 < X < 1 \text{ e } \tau > 0, \quad i = 2, \dots, M \quad (B.1)$$

$$-\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial X} = Q(\tau) \quad \text{e } X = 0 \text{ e } \tau > 0 \quad (B.2)$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial X} + Bi\Phi(X, \tau) = 0 \quad X = 1 \text{ e } \tau > 0 \quad (B.3)$$

$$\Phi(X, \tau) = \Phi_{inicial} \quad 0 < X < 1 \text{ e } \tau = 0 \quad (B.4)$$

Para determinação da distribuição de temperatura pelo método implícito de diferenças finitas, foi utilizado o índice i dos pontos discretos para a variável X . Contudo, além de ser discretizado em relação à posição, o problema deve ser discretizado em relação ao tempo. O inteiro j é introduzido para esse propósito. A discretização das derivadas fica da forma

$$\frac{\partial^2 \Phi(X, \tau)}{\partial X^2} = \frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - 2\Phi_i^{j+1} + \Phi_{i-1}^{j+1}}{(\Delta X)^2} \quad (B.5)$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial X} = \frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - \Phi_{i-1}^{j+1}}{2\Delta X} \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial \Phi(X, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^j}{\Delta \tau} \quad (B.7)$$

Substituindo as Eq. (B.5 – B.7) em (B.1), tem-se

$$\frac{\Phi_{i+1}^{j+1} - 2\Phi_i^{j+1} + \Phi_{i-1}^{j+1}}{(\Delta X)^2} = \frac{\Phi_i^{j+1} - \Phi_i^j}{\Delta \tau} \quad (B.8)$$

Ou seja,

$$\Delta \tau \Phi_{i-1}^{j+1} - (2\Delta \tau + (\Delta X)^2) \Phi_i^{j+1} + \Delta \tau \Phi_{i+1}^{j+1} = -(\Delta X)^2 \Phi_i^j \quad (B.9)$$

A equação (B.9) é a equação de condução de calor discretizada. Ela é escrita para todos os nós do domínio computacional interno. Para os nós das fronteiras, onde são aplicadas as condições de contorno discretizadas, são encontradas condições fictícias para as temperaturas *em* $X = 0$ *e* *em* $X = 1$, que podem ser eliminadas por meio das condições de contorno.

Substituindo a eq. (B.6) em (B.2) tem-se:

$$-\frac{\Phi_2^{j+1} - \Phi_0^{j+1}}{2\Delta X} = Q(\tau) \quad (B.10)$$

Ou seja, obtém-se a temperatura para o ponto fictício Φ_0

$$\Phi_0^{j+1} = \Phi_2^{j+1} + 2\Delta X Q(\tau) \quad (B.11)$$

Assim, substituindo a equação (B.11) em (B.9), tem-se:

$$-(2\Delta \tau + (\Delta X)^2) \Phi_1^{j+1} + 2\Delta \tau \Phi_2^{j+1} = -(\Delta X)^2 \Phi_1^j - 2\Delta X Q(\tau) \quad (B.12)$$

Agora, substituindo a eq. (B.6) em (B.3) tem-se:

$$\frac{\Phi_{N+1}^{j+1} - \Phi_{N-1}^{j+1}}{2\Delta X} + Bi\Phi_N^{j+1} = 0 \quad (B.13)$$

Ou seja, obtém-se a temperatura para o ponto fictício ψ_{N+1}

$$\Phi_{N+1}^{j+1} = \Phi_{N-1}^{j+1} - 2\Delta X Bi\Phi_N^{j+1} \quad (B.14)$$

Substituindo a equação (B.14) em (B.9), tem-se:

$$2\Delta\tau\Phi_{N-1}^{j+1} - (2\Delta\tau + (\Delta X)^2 + 2\Delta X Bi)\Phi_N^{j+1} = -(\Delta X)^2\Phi_N^j \quad (B.15)$$

O sistema linear resultante da discretização da equação da condução de calor, dado pelas equações (B.9), (B.12) e (B.15) foi resolvido pelo método de Thomas (FORTUNA, 2000).